

1



2

Undersøgende matematikundervisning (UM)
– modellering som middel og mål

ved Morten Blomhøj, DPU, AU & Mikael Skånstrøm, VIA, begge også fra
NCUM – Nationalt Center for Udvikling Matematikundervisning
www.matematikdidaktik.dk

3

Kære Kommune!

Vi vil godt deltage i den udskrevne konkurrence om forskønnelse af Bytorvet. Der er hul flere steder i belægningen på Bytorvet. Det er for det første ikke særlig pænt, og det kan også være farligt, hvis nogen falder i et af hullerne. Vi har været på virksomhedsbesøg i Industriens Hus på Rådhuspladsen, og der var et virkelig flot gulv. Nogle gange kan man også lige se et glimt af det i Aftenshowet på DR 1.

- Fliser som disse kunne være bare så flotte på Bytorvet. Vi tænker, man må kunne få fliser fremstillet af den samme type, som kaldes Cairoflisen
- Bytorvet vil kunne blive super flot og sikkert også berømt med sådanne fliser. Vi er begyndt at designe fliserne som et projekt i matematiktimerne.
- Vi vedlægger en plan over, hvordan fliserne kan lægges og illustration sammen eksempler på fliser i træ, som vi har lavet i MakerSpace.

Kærlig hilsen
Elevener i 8. klasse på Byskolen.

Brev til kommunen fra 8.a på Byskolen. (Blomhøj & Skånstrøm, i tryk, 2022)

4

Hvad er UM? – en løselig definition

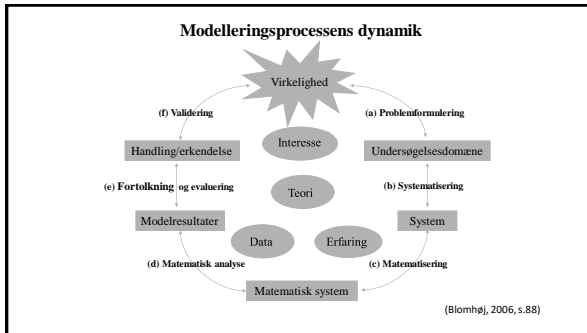
- UM er tilrettelagt bevidst for at motivere og støtte elevernes *undersøgende arbejde i eller med matematik*.
- Der er fokus på at etablere og *overdrage til eleverne* sammenhørende spørgsmål, som kan være styrende for deres undersøgende arbejde.
- I UM arbejder eleverne med at afgrænse og formulere spørgsmål, opsøge information, gennemføre (empiriske) undersøgelser, danne og teste hypoteser, behandle og løse matematiske problemer, samt at konstruere og analysere matematiske modeller.
- Det er en pointe i UM at gøre arbejdet oplevelsespræget, således at der etableres "*erindringskæder*" som eleverne kan bruge til at huske og genkalde sig den undersøgende aktivitet og de tilhørende matematiske pointer. Forløb i UM skal derfor have et navn.

5

Hvad er UM? – en løselig definition

- I UM er der fokus på centrale faglige erkendelser som eleverne kan udvikle *via det undersøgende arbejde, og på hvordan disse erkendelser kan støttes* for forskellige elevgrupper.
- Dialog* mellem eleverne og med læreren spiller en central, men forskellig rolle i de forskellige faser af UM. (Alro & Skovsmose, 2002, 2006)
- Udpegning, forankring* og (efterfølgende) *bearbejdning* af matematiske begreber, metoder og pointer fra det undersøgende arbejde er udgangspunkt for opbygning af fælles matematikviden og udvikling af matematiske kompetencer. (Artigue & Blomhøj, 2013)

6



7

University College
Århus

3. Galois-tilfælde
Carlo Ribot har fået et svar, fordi den bruges ved flodbedæmningen i Gars. I Danmark kan den ikke
se indarbejdes her, fordi afstanden er på 200 meter fra

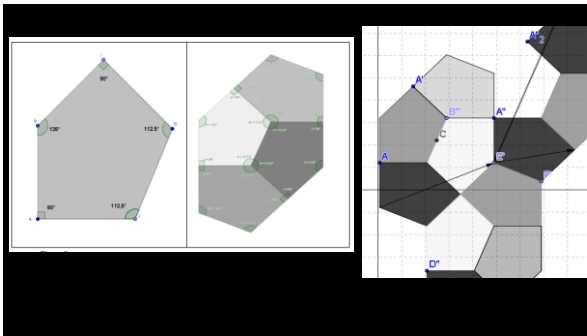
3.1 Konstruer Carlo Ribot i et dynamisk geometriprogram. Carlo Ribot skal være orienteret på den
måde, at det er muligt at anbringe på størrelsen uden at ændre på formen. Vælg
konstruktionens størrelse.

Carlo Ribot kan konstrueres. Det vil sige, at den kan dækkes af flader, hverken af en, hverken en
flade kan dækkes af Carlo Ribot.

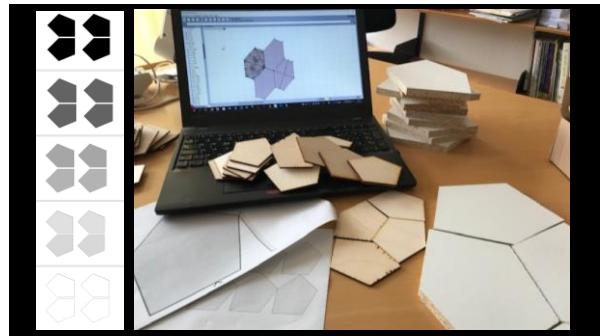
3.2 Sættes Ribot, halvdelen Pythagoras, der kan Pythagoras den 145 Carlo Ribot over i Ribot 1, og halvdelen Pythagoras
der kan Pythagoras den 145 Carlo Ribot over i Ribot 2.

3.3 Løsning: Indsæt Carlo Ribot med halvdelen Pythagoras som flader i en flade.

8



9



10



11

Hvad gør man i praksis? - en didaktisk model for UM med 3 faser

1. **Iscenesættelse af forløbet over for eleverne**
 - overdragelse af udfordringen/problem til eleverne
 - etablering af det didaktiske miljø for arbejdet
 - formidling af de tidsmæssige og praktiske rammer
 - klargøring af produktkrav og bedømmelsesform
 2. **Elevernes selvstændige undersøgende arbejde**
 - tilstrækkelig tid, frihed og støtte til, at eleverne kan arbejde selvstændigt med problemet
 - støtte og udfordring gennem dialog
 - forberedelse gennem konstruktion af dialoger
 3. **Fælles refleksion og faglig læring**
 - erfaringer og resultater fra forløbet systematiseres og faglig viden og faglige pointer søges fællesgjort
- (Blomhøj, 2016 og 2021)

12

(1) Scenearbejde om forløbet over for eleverne indeholder

- overdragelse af udfordringen/problemet til eleverne
- etablering af et fælles sprog med eleverne om udfordringen
- etablering af det didaktiske miljø for arbejdet
- formidling af de didaktiske og praktiske rammer
- klargøring af produktkrav, bedømmelsesformer og succeskriterier

(2) Elevernes selvstændige undersøgelse arbejde kræver

- tilstrækkelig tid, frihed og støtte til, at de kan arbejde selvstændigt med problemet
- støtte til etablering af samarbejde mellem elever
- støtte og udfordring gennem dialog
- forberedelse gennem konstruktion af eksemplariske dialoger

(3) Fælles refleksion og faglig læring medfører

- at erfaringer og resultater fra forløbet systematiseres og gøres fælles
- udpegning af faglige pointer i elevernes arbejde
- opbygning af fælles faglig viden med fælles fagprog
- forbindelser og sammenkædninger af denne viden med tidligere etableret viden

(Blomhøj & Skårstrom, i tryk, 2022)

13

JYSK F-linse firma - fliser forever

Vi har et fantastisk tilbud til jer!

Et par ord: Et fantastisk tilbud af begrænset varighed på de unikke Carolflex i æggestik glas, og så vi har bemærket, at I trænger til ny flotbetegnelse på skolens område, får i dette tilbud.

En enkelt af de unikke Carolflex koster kun 125 kr. Vi tilbyder skolen et læge tilbud for 250 kr. per år!

Venlig hilsener
Kia Ri
Direktør
JYSK F-linse firma
PS: Carolflexen ligger også i industriens hus

Her er en model af Carolflex.

Ordet
Størrelse som på billedet cirka
4 nuancer
225,- kroner per flise
300,- kroner per m² for lægning

JYSK F-linse firma

14

(1) Scenearbejde om forløbet over for eleverne indeholder

- overdragelse af udfordringen/problemet til eleverne
- etablering af et fælles sprog med eleverne om udfordringen
- etablering af det didaktiske miljø for arbejdet
- formidling af de didaktiske og praktiske rammer
- klargøring af produktkrav, bedømmelsesformer og succeskriterier

(2) Elevernes selvstændige undersøgelse arbejde kræver

- tilstrækkelig tid, frihed og støtte til, at de kan arbejde selvstændigt med problemet
- støtte til etablering af samarbejde mellem elever
- støtte og udfordring gennem dialog
- forberedelse gennem konstruktion af eksemplariske dialoger

(3) Fælles refleksion og faglig læring medfører

- at erfaringer og resultater fra forløbet systematiseres og gøres fælles
- udpegning af faglige pointer i elevernes arbejde
- opbygning af fælles faglig viden med fælles fagprog
- forbindelser og sammenkædninger af denne viden med tidligere etableret viden

15

JYSK F-linse firma - fliser forever

Vi har et fantastisk tilbud til jer!

Et par ord: Et fantastisk tilbud af begrænset varighed på de unikke Carolflex i æggestik glas, og så vi har bemærket, at I trænger til ny flotbetegnelse på skolens område, får i dette tilbud.

En enkelt af de unikke Carolflex koster kun 125 kr. Vi tilbyder skolen et læge tilbud for 250 kr. per år!

Venlig hilsener
Kia Ri
Direktør
JYSK F-linse firma
PS: Carolflexen ligger også i industriens hus

Her er en model af Carolflex.

Ordet
Størrelse som på billedet cirka
4 nuancer
225,- kroner per flise
300,- kroner per m² for lægning

JYSK F-linse firma

16

(1) Scenearbejde om forløbet over for eleverne indeholder

- overdragelse af udfordringen/problemet til eleverne
- etablering af et fælles sprog med eleverne om udfordringen
- etablering af det didaktiske miljø for arbejdet
- formidling af de didaktiske og praktiske rammer
- klargøring af produktkrav, bedømmelsesformer og succeskriterier

(2) Elevernes selvstændige undersøgelse arbejde kræver

- tilstrækkelig tid, frihed og støtte til, at de kan arbejde selvstændigt med problemet
- støtte til etablering af samarbejde mellem elever
- støtte og udfordring gennem dialog
- forberedelse gennem konstruktion af eksemplariske dialoger

(3) Fælles refleksion og faglig læring medfører

- at erfaringer og resultater fra forløbet systematiseres og gøres fælles
- udpegning af faglige pointer i elevernes arbejde
- opbygning af fælles faglig viden med fælles fagprog
- forbindelser og sammenkædninger af denne viden med tidligere etableret viden

17

JYSK F-linse firma - fliser forever

Vi har et fantastisk tilbud til jer!

Et par ord: Et fantastisk tilbud af begrænset varighed på de unikke Carolflex i æggestik glas, og så vi har bemærket, at I trænger til ny flotbetegnelse på skolens område, får i dette tilbud.

En enkelt af de unikke Carolflex koster kun 125 kr. Vi tilbyder skolen et læge tilbud for 250 kr. per år!

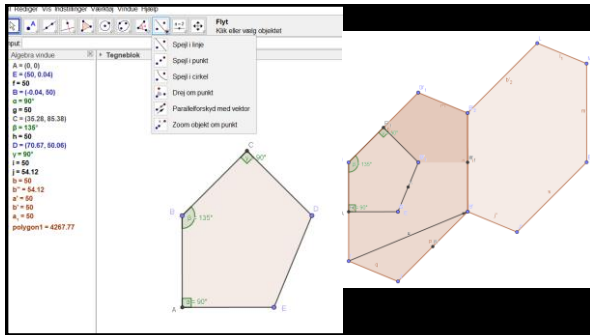
Venlig hilsener
Kia Ri
Direktør
JYSK F-linse firma
PS: Carolflexen ligger også i industriens hus

Her er en model af Carolflex.

Ordet
Størrelse som på billedet cirka
4 nuancer
225,- kroner per flise
300,- kroner per m² for lægning

JYSK F-linse firma

18



19

Beregninger på Amagerskolen

Vi har tegnet flisen op ude på de brugte fliser og målt der.
Hele arealet der skal fliser på, har vi målt til 186 m² og en flise måler 0,466 m²
Vi skal bruge $\frac{186}{0.466} \approx 399,142$ - så der er nok 400 fliser i alt.
400 fliser koster: 400 · 225 kr = 90000 · kr
Belægning koster 186 · 350 kr = 65100 · kr
Det bliver i alt 90000 kr + 65100 kr = 155100 · kr
Det tror vi ikke skolen vil give bare for at det skal se pænt ud uden for klassen 😊

20

3. fase – drøftelse med hele

Modellering som middel til læring af matematik:

- Hvordan kan vi præsentere resultater for skolebestyrelsen, kommunen eller ...?
 - æstetisk i forhold til hvor smukt brolægningen bliver med fire forskellige nuancer af fliser
 - den matematiske fortælling om Cairo-flisen, tessellering og fire farveproblemet

Modellering som mål – modelleringsprocessen kan genbesøges:

- Budgettet for projektet som matematisk model
 - hvor mange ekstra fliser skal der højst bruges ved kanterne?
 - hvad koster det at få fliserne lagt?
 - hvor lang tid vil tage?
 - kan der komme ekstraudgifter?
 - hvad er usikkerhed på priserne og dermed på budgettet?

21

1: $B = C = 180^\circ$, $A + D + E = 360^\circ$

2: $c = e$, $B = D = 180^\circ$

3: $a = b, d = c + e$, $A = C + D = 120^\circ$

4: $b = c, d = e$, $B = D = 90^\circ$

5: $a = b, d = e$, $A = 60^\circ, D = 120^\circ$

6: $a = d = e, b = c$, $B = D = 180^\circ, 2B = E$

7: $d = c = d = e$, $B = 2E = 2C = D = 360^\circ$

8: $b = c = d = e$, $2B = C + D = 2E = 360^\circ$

9: $b = c = d = e$, $2A = C + D = 2E = 360^\circ$

10: $a = b = c = e$, $A = 90^\circ, B = E = 180^\circ, B = 2C = 360^\circ$

11: $2a = c = d = e$, $A = 90^\circ, C + E = 180^\circ, 2B = C = 360^\circ$

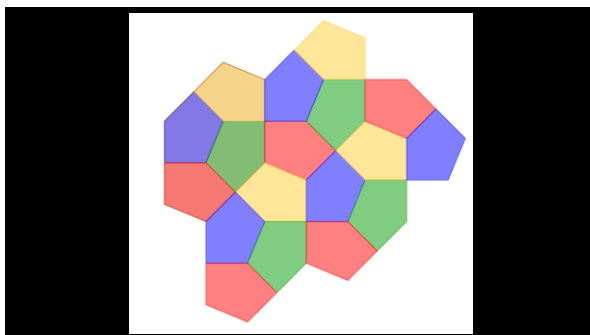
12: $a = b = c = e$, $A = 90^\circ, C + E = 180^\circ, 2B = C = 360^\circ$

13: $d = 2a = 2e$, $B = E = 90^\circ, 2A = D = 360^\circ$

14: $2a = 2c = d = e$, $A = 90^\circ, B = 143.34^\circ, C = 65.32^\circ, D = 124.66^\circ, E = 110.66^\circ, (2B = C = 360^\circ, C + E = 180^\circ)$

15: $a = c = e, b = 2a$, $A = 150^\circ, B = 60^\circ, C = 135^\circ, D = 150^\circ, E = 90^\circ$

22



23

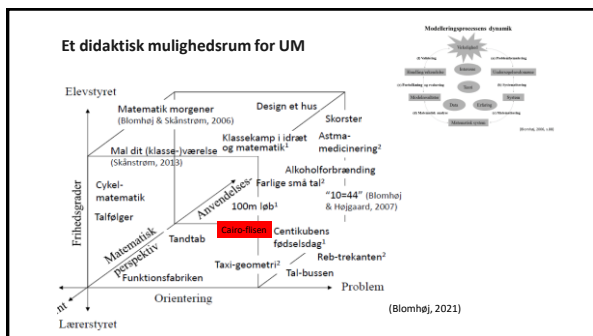
<http://people.math.gatech.edu/~thomas/FC/fourcolor.html#Why>

The Four Color Theorem

This page gives a brief summary of a new proof of the Four Color Theorem and a four-coloring algorithm

STEM 271020

24



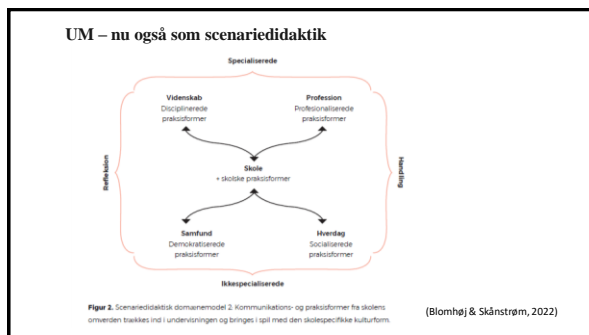
25

- ### Essentielle elevaktiviteter i UM
- at stille spørgsmål
 - at afgrænse og strukturere
 - at observere systematisk
 - at måle og kvantificere
 - at klassificere
 - at udvikle definitioner
 - at beregne og lave overslag
 - at indføre og anvende symboler
 - at repræsentere og visualisere
- at anvende og fortolke algebra
 - at opstille, fortolke og løse ligninger
 - at ræsonnere og bevise
 - at danne og teste hypoteser
 - at eksperimentere
 - at kontrollere variable
 - at fortolke og vurdere resultater
 - at kommunikere
 -
- (Blomhøj, 2021)

26

- ### Essentielle lærerhandlinger i UM
- at sætte scenen for undersøgende aktiviteter
 - at inspirere til undersøgende holdning og tilgange til matematik
 - at formidle og fællesgøre læringsmål
 - at bygge på og udbygge elevernes erfaringer
 - at støtte elevernes ejerskab til problemer og projekter
 - at skabe rum for dialogisk samspil i klassen
 - at opmuntre til spørgsmål og refleksion
- at stille åbne og nysgerrige spørgsmål til elevernes arbejde
 - at bemærke og påskønne eleveres faglige ideer og ræsonnementer
 - at værdsætte forsøg og fejl som grundlag for læring
 - at fremme samarbejde
 - at udpege og almenføre centrale begreber og metoder
 - at evaluere elevernes faglige læring
 - at evaluere forløb og udvikle praksis
 -
- (Blomhøj, 2021)

27



28

- ### Hvorfor er UM relevant for udvikling af praksis?
- UM findes i grundskolen og i de gymnasiale uddannelser, men ikke som en almindeligt forekommende praksis med klare matematik-didaktiske begrundelser
 - UM kan styrke matematikundervisningens **bidrag til almindendannelse** (Blomhøj, 2016, 2001)
 - UM kan bidrage til at nuancere **elevernes billede af matematik**
 - UM kan skabe motivation for og støtte til matematiklæring med dybde og forståelse
 - UM giver muligheder for at arbejde med matematisk modellering – både som middel og mål (udvikling af modelleringskompetence).
 - UM kan danne ramme om **fagsamspil** – fx i STEM sammenhæng
 - UM kan skabe rammer for **integration af it-værktøjer** i elevernes arbejde med matematik

29


Dewey's uddannelsesteori som grundlag for UM

- Mennesket søger at forstå og beherske sin omverden gennem undersøgende og problemløsende adfærd (**reflective inquiry**).
- Videnskabelig viden er udviklet gennem raffinering og kultivering af denne **grundlæggende erkendelsesinteresse**.
- Gyldig (sand) viden er effektiv til forståelse af fænomener og løsning af problemer; samt til organisering af viden.
- Uddannelse skal tjene udvikling af demokrati ved at **danne den enkelte** til at lære gennem **undersøgelse og refleksion i sociale fællesskaber**.
- Eleverne skal **opleve viden** som meningsfuld og effektiv til organisering af deres erfaring og til forståelse af omverdenen.
- Elevernes erfaring og viden er **grundlaget for tilrettelæggelse** af undervisning, og viden almenføres gennem **fælles refleksioner over fælles erfaringer**.

(Dewey, 1933, 1938) (Artigue & Blomhøj, 2013)

30

Besøg
www.matematikedidaktik.dk



Dagtilbud

- At tælle
- Matematik og serier
- Matematisk opmærksomhed
- Talforståelse

Grundskole

- Algebra på de væreste klassetrin
- Kompetenceorienteret matematikundervisning
- Matematiske ressourcecenter
- Teknologiforståelse
- Undersøgende matematikundervisning i grundskolen

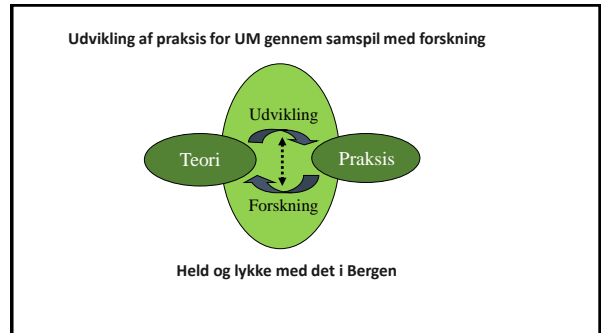
Gymnasie

- Matematiske modeller
- Undersøgelisbaseret matematikundervisning i gymnasiet

Erhvervscole

NC
UM
Nationalt Center for Udvikling af Matematikundervisning

31



32

Referencer

Alro, H. & Skovsmose, O. (2002). *Dialogue and learning in mathematics education: Intention, reflection and critique*. Dordrecht: Kluwer.

Alro, H. & Skovsmose, O. (2006). Læring mellem intention, refleksion og kritik, I Skovsmose & Blomhøj (2006), kap.7.

Artigau, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualising inquiry based education in mathematics. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 45 (6), 798-810.

Blomhøj, M. (2021). Undersøgende matematikundervisning - fra teori til praksis. I Wahl, Michael and Weng, Peter (eds.) *Håndbog for matematikvejledere 2. udgave*. København: Dansk Psykologisk Forlag.

Blomhøj, M. (2016). *Fagdidaktik i matematik*. København: Frydenlund.

Blomhøj, M. & Skånstrøm, M. (i tryk, 2022). Fornylse af Bytorvet - et scenariedidaktisk forløb i 8. klasse. I S. Skov Fougat, J. Bundsgaard, T. Hanghøj & M. Misfeldt (red.) *Håndbog i Scenariedidaktik*. Udkommer i foråret 2022 på Aarhus Universitetsforlag, kap. 17.

Blomhøj, M. & Skånstrøm, M. (2006). Matematik Morgener - matematisk modellering i praksis. I O. Skovsmose og M. Blomhøj (red.) *Kunne det tænkes? - om matematiklæring*. København: Malling Beck, 7-23.

Dewey, J. (1938). *Logic: The theory of inquiry*. New York: Holt

Dewey, J. (1933). *How we think: A restatement of the relation of reflective inquiry thinking to the educative process*. Boston, MA: Heath.

Larsen, D. M., & Lindhart, B. (2019). Undersøgende aktiviteter og ræsonnementer i matematik undervisningen på mellemtrinnet. *MONA-Matematik- og Naturfagsdidaktik*, 7-21.

33

Skovsmose, O. (2003). Undersøgelandskaber. Skovsmose, O. & Blomhøj, M. (red.). *Kan det virkelig passe? - om matematiklæring*. København: Malling Beck, 143-158.

Skovsmose, O. & Blomhøj, M. (2006) (red.). *Kunne det tænkes? - om matematiklæring*. København: Malling Beck.

Skånstrøm, M. & Blomhøj, M. (2016). Det kommer an på... I Rangnes, T.E. og Alro, H (red.) *Matematiklæring for Fremtiden*. Caspar forlag.

34