

Språksensitiv matematikkundervisning

Språk er ikke bare et redskap for å kommunisere og representere kunnskap, men også et verktøy for tenkning og for å konstruere begrepsforståelse. Flere studier har vist at språkferdigheter i undervisningsspråket påvirker læringsmuligheter i matematikkundervisningen, for både enspråklige og flerspråklige elever, se referanser i Prediger og Wessel (2011). Matematikkundervisning som vektlegger relasjonell forståelse (*conceptual understanding*) og argumentasjon kan derfor være spesielt utfordrende for elever med begrenset kompetanse i undervisningsspråket. Språksensitiv matematikkundervisning søker å innlemme språklæring i matematikklæringen istedenfor å betrakte disse som adskilte læringsmål.

Prediger og Wessel (2011) har utviklet en modell som fremstiller ulike uttryksmåter, muntlig og skriftlig språk, grafiske representasjoner, matematiske symboler, konkrete osv. og som representerer disse i flere lag, se Figur 1. Modellen kan brukes som et redskap for å konstruere varierte læringsmuligheter. Den drar nytte av og forbinder kunnskaper fra forskningstradisjoner fra ulike felt:

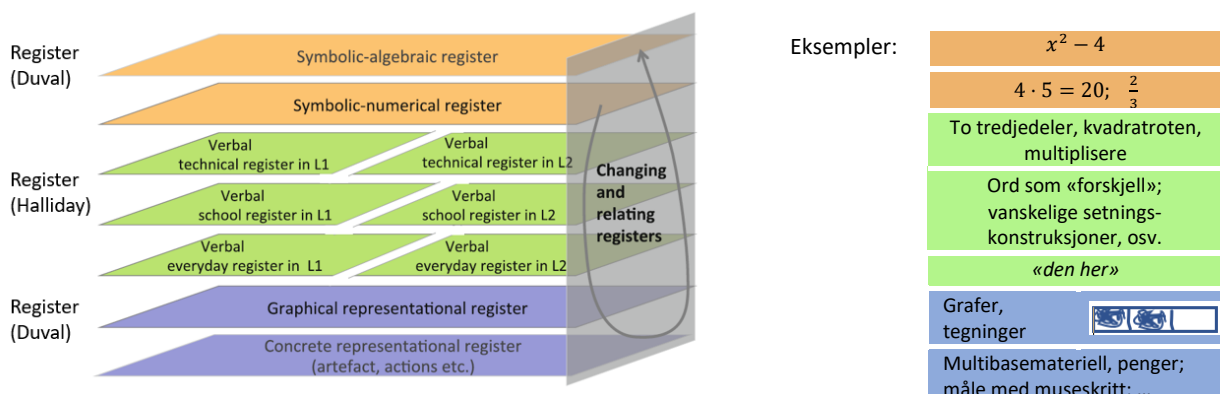
- Lingvistik: analyse av ulike språkformer innenfor et språk
- Flerspråklighet: overganger mellom hjemmespråk og undervisningsspråk
- Representasjonsformer i matematikk og overganger mellom disse: eksempelvis muntlige og skriftlige språklige fremstillinger, formler, grafer, konkretiseringsmaterieell, gester, osv.

I modellen til Prediger og Wessel blir ulike språkformer kalt for registre, der *register* er et begrep fra språkvitenskap som blir brukt i ulik betydning av ulike teoretikere. I figuren nedenfor inngår begrepet register i to forskjellige betydninger:

Semiotisk register (ifølge definisjonen til Duval): Et semiotisk register er et representasjonssystem hvor det er mulig å transformere tegn/representasjoner. Eksempel: algebraiske symboler og formler

Register (ifølge definisjonen til Halliday): Et register er et sett av ord, betydninger og en gruppering av semantiske mønstre som man typisk bruker under bestemte forutsetninger eller i bestemte situasjoner. Tenk på en gruppe tilskuere på fotballbanen som diskuterer om det var riktig at det ble straffespark eller på hvordan dommer, aktor og forsvarer kommuniserer i en rettsal. I enhver situasjon og kontekst kan man identifisere språkformer som er typiske for akkurat denne situasjonen eller konteksten. Dette gjelder både setningsbygning (lange og korte setninger, hele eller uferdige setninger) og ordforrådet («hands», «filme»; «anke», «straffeutmåling»). Andre eksempler kan være hvordan et lærerkollegium kommuniserer med hverandre under et seminar om lokalt læreplanarbeid eller hvordan en lærer kommuniserer med elever på første trinn i matematikkundervisningen.

Følgende figur (Prediger & Wessel, 2013) illustrerer ulike lag av registre som er relevante for matematikkundervisningen, med noen eksempler i tabellen til høyre.



Figur 1

Vi skal se nærmere på den grønne delen av figuren. Her finner vi begrepene verbalt hverdagsregister, verbalt skolerregister og verbalt teknisk register. Ettersom Prediger og Wessel er interessert i flerspråklige klasserom knytter de disse til to språk L(anguage)1 og L(anguage)2 som vil være en flerspråklig elevs hjemmespråk og undervisningsspråket. Ordet «verbalt» henviser til språkformer som uttrykkes gjennom ord (fra latinsk «verbum» som betyr ord, i motsetning til andre uttrykksmåter som kroppsspråk, tegning, matematiske formeluttrykk osv.). Disse verbale registrene kan bli uttrykt både muntlig og skriftlig. Hverdagsregisteret består av ord og uttrykksmåter som er vanlige å bruke i uformelle kontekster i hverdagen og består først og fremst av muntlige uttrykk. Det tekniske registeret består av ord og uttrykksmåter som er vanlige å bruke i en bestemt faglig kontekst, i dette tilfelle matematikk. Et slikt register blir brukt både i fagtekster og i faglige diskusjoner. Figuren nedenfor viser et eksempel på bruk av teknisk register i matematikk:

Et posisjonssystem er et tallsystem, der verdien av et symbol eller et siffer avhenger av dens plassering.
--

Det tekniske registeret inneholder ord som er typiske for matematikken og beskriver begreper og objekter som bare forekommer i matematikkens verden (som *siffer* og *tallsystem*). Skoleregisteret ligger mellom hverdagsregisteret og det tekniske registeret, og noen betegner det som det «glemte» registeret i skolen som ikke vies nok oppmerksomhet i didaktisk forskning og i undervisningsplanlegging. Skoleregisteret er ikke knyttet til et bestemt fagområde. Det består av mer formelle uttrykksmåter enn hverdagsregisteret og brukes for eksempel i tekstoppgaver, der uttrykk som «hva er forskjellen i høyde?» kan forekomme istedenfor en mer hverdagslig uttrykksmåte som: «Hvor mye høyere er Per enn Pål?».

Det er viktig å være klar over at de tre ovennevnte språklige registrene er ikke strengt adskilte fra hverandre. For eksempel kan ordet punkt referere til et matematisk (geometrisk) objekt, men ordet punkt brukes i mange andre sammenhenger som hører til andre tekniske registre enn det matematiske eller til skolerregisteret eller til hverdagsregisteret. Eksempler kan være: tyngdepunkt, referansepunkt, møtepunkt, på punkt og prikke. Det er også viktig å nevne at skolerregisteret ikke bare brukes på skolen. Men ifølge Prediger og Wessel er skolen for enkelte elever det eneste stedet, der de vil møte skolerregisteret, enten fordi de snakker et annet språk enn undervisningsspråket hjemme eller fordi de kommer fra hjem, der en slik formell språklig uttrykksmåte ikke brukes i samtaler. (Modellen ble først utviklet i tyskspråklige publikasjoner, der skolerregisteret kalles for «Bildungssprache», altså grovt oversatt dannelsesspråk.) Prediger og Wessel påpeker at elever som ikke behersker skolerregisteret, har problemer med å delta i en matematikkundervisning som vektlegger argumentasjon og relasjonell forståelse, fordi ord og uttrykksmåter fra skolerregisteret ofte blir brukt for å forklare komplekse tankeganger og resonnementer. (Se også avsnittet om ord-, setnings-, tekst- og diskursnivå nede.)

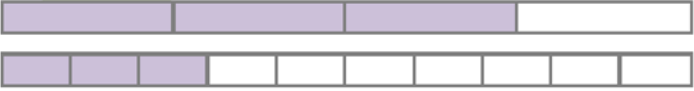
For at alle elever lykkes i en matematikkundervisning som vektlegger argumentasjon og relasjonell forståelse, må læreren ifølge Prediger og Wessel systematisk skape anledninger i undervisningen, gjennom oppgaver og samtaler, der elevene relaterer de ulike registrene til hverandre og utvikler sine muligheter til å uttrykke seg gjennom ulike registre. Å relatere de ulike registrene kan og skal skje på varierte måter, som blir eksemplifisert i tabellen nedenfor i konteksten av brøk.

Prediger og Wessel (2013) tar utgangspunkt i Swain's (1995) *output hypothesis* som sier at det spiller en avgjørende rolle for suksessfull språklæring at den lærende blir utfordret til å bruke målspråket som skal læres. Prediger og Wessel overfører denne hypotesen til matematikklæring i flerspråklige kontekster. I denne sammenhengen ser man ikke bare på naturlige språk, men på et videre spenn av registre som også inkluderer gester, kroppsspråk, matematisk algebraiske formeluttrykk, visuelle representasjoner av matematiske objekter, forklaringer som tar i bruk konkretiseringsmaterieell osv.

Prediger og Wessel har i sitt forskningsprosjekt arbeidet med flerspråklige elever som arbeidet med brøk. Figuren nedenfor viser en liste over ulike typer aktiviteter som utfordrer elever til å bruke og

reflektere over ulike registre i sammenheng med brøk. Bruk av ulike farger i tabellen viser hvilke registre som benyttes i de ulike aktivitetene.

Tabell 1: Eksempler av overganger mellom registre (Prediger og Wessel, 2013), oversatt til norsk

Type aktivitet:	Eksempel innen brøk:
A. Oversette fra et register til et annet	Her er en brøk på symbolsk form , for eksempel $\frac{3}{4}$, finn en situasjon hvor denne er aktuell eller tegn et bilde . Her er en vanskelig tekst , oversett denne og bruk dine egne ord .
B. Finn passende registre som hører sammen	På disse 15 kortene finner du brøker , beskrivelse av situasjoner og tegninger . Gruppér dem som hører sammen. Legg til kort som mangler. Matematikere bruker disse ordene for å beskrive brøker. Bruk disse begrepene i et gitt eksempel på en symbolsk brøk : nevner, teller, del, helhet. Hva betyr disse i en situasjon med rettferdig deling?
C. Forklar hvorfor eksempler fra ulike registre passer sammen eller ikke passer sammen/representerer det samme eller ikke representerer det samme	Gi elevene et bilde som representerer for eksempel $\frac{3}{4}$ og deretter en representasjon som viser for eksempel $\frac{2}{4}$ og la elevene finne ut om bildene representerer samme mengde. 5 ulike elever beskriver hva $\frac{3}{5}$ betyr, hvilken forklaring er riktig? Du kan bruke bilder eller beskrivelse av situasjoner for å støtte konklusjonen din.
D. Undersøke matematiske sammenhenger eller strukturer ved å bruke et gitt eller selvvalgt register	Hva er størst av $\frac{3}{4}$ og $\frac{3}{10}$ og hvorfor? Forklar hva av brøkstaver . Finn en likeverdig brøk til $\frac{3}{4}$ hva et bilde eller en situasjonsbeskrivelse . 
E. Systematisk variasjon av en representasjon og studie av hva som endrer seg i andre registre	Variér en representasjon systematisk og se på effekten av variasjon i andre registre. (se eksempel nede: Parts of chocolate bar)
F. Reflektere over eventuelle forskjeller mellom ulike eksempler som tilhører det samme registeret	Lag ulike spørsmål som gir svaret $\frac{3}{4}$ Samle ulike bilder av $\frac{3}{4}$ og $\frac{3}{10}$. Hvilke av disse representasjonene er best når du skal sammenligne størrelsen på brøkene?

Ordnivå, setningsnivå, tekstenivå og diskursnivå

I dette avsnittet kommer vi tilbake til de tre grønne lagene av verbalspråk som er vist i Figur 1. I mange klasserom finner man ordplakater som viser eksempelvis bilder av geometriske figurer med tilhørende navn eller formidler ord som teller, nevner og brøkstrek. Disse er viktige, men forskning viser at kjennskap til ord ikke er tilstrekkelig for å kunne argumentere for sin egen tankegang. Kanskje du har opplevd selv at det er en ting å kjenne til enkelte ord på et annet språk og noe annet å lage en hel setning eller klare å formidle en litt mer kompleks tankegang. Språklige utfordringer er plassert på ulike nivå: ordnivå, setningsnivå, tekstenivå og diskursnivå (Wessel et al., 2018). Ordnivået handler om selve ordforrådet. Setningsnivået handler om å bygge (korrekte) setninger og har altså en grammatisk komponent som omfatter bøyninger, valg av preposisjoner osv. Tekstenivået handler om å kunne forstå

en sammenhengende tekst og omfatter også kunnskap om ulike sjangre og det å kjenne de nødvendige språklige redskapene for å kunne forstå og/eller selv bygge opp skriftlig eller muntlig tekst innenfor en bestemt sjanger. Eksempler av sjangre relatert til matematikkundervisning er tekstoppgave, argumentasjon/bevis for en påstand, konstruksjonsbeskrivelse i geometri osv. Tabellen nedenfor fremhever spesielt diskursnivået som handler om å utvikle de (ofte muntlige) språklige redskapene som trengs for å beskrive sammenhenger, begrunne og argumentere. Det er generelt mer komplekst å begrunne hvorfor det man har gjort blir riktig, enn å beskrive hva man har gjort.

Ordnivå (word level)	Ord og uttrykk (både allmennspråklig og matematiske fagbegreper og uttrykk), eksempelvis: Oppgave, problemløsning; samarbeide. Teller, nevner, brøkstrek; likeverdige brøk; utvide, forkorte, finne fellesnevner
Setningsnivå (sentence level)	Setningsbygning, grammatikk: 15 er delelig med 3.
Tekstnivå	Gi en sammenhengende beskrivelse av en fremgangsmåte; forstå sammenhengen i en tekst. Jeg ville addere brøkene. Først måtte jeg finne fellesnevner som er 15. Jeg utvidet den første brøken. Da måtte jeg gange med 3 i både teller og nevner.
Diskursnivå (discourse level)	Beskrive generelle sammenhenger, begrunne, argumentere: Når man utvider en brøk, betyr det at man deler opp stripen i flere like store deler. Andelen av stykkene som er skravert, forblir like stor.

Stillasbygging

De språklige redskapene som ble beskrevet i de to forrige avsnittene, dvs. evnen til å veksle mellom uttrykksmåter i ulike registre og det å kunne bruke språk på ulike nivåer inkludert diskursnivået, er ikke bare viktige med tanke på språkets kommunikative funksjon, men også med tanke på språkets kognitive funksjon, altså når språk skal være et redskap for tenkning. På grunn av de mangfoldige uttrykksmåtene som utgjør et rikt matematisk språk for både kommunikasjon og tenkning, snakker Prediger et al. om språkforrådet, istedenfor det mer vanlige ordet ordforråd. Forskning viser at utviklingen av språkforrådet må arbeides med bevisst i undervisningen for at det skal være tilgjengelig for alle elevene (Wessel et al., 2018).

Stillasbygging er et velkjent pedagogisk begrep. Med referanse til Hammonds og Gibbons (2005) introduserer Prediger og Wessel (2013) begrepene *macro scaffolding* og *micro scaffolding*. Stillasbygging på makronivå handler om planleggingen av undervisningen med tanke på utvalg av oppgaver og aktiviteter med hensyn på elevenes forkunnskaper, valg av representasjonsformer, avgjørelser om rekkefølge osv. Stillasbygging på mikronivå skjer i lærerens direkte møte med elevene når læreren må ta (ofte spontane) avgjørelser om kommunikasjonsformer, forklaringer, spørsmål og svar. Det handler også om avgjørelser og i hvilken form innspill fra elever skal tas videre i en konkret undervisningssituasjon. Stillasbygging på mikro- eller makronivå er relevant med hensyn på alle aspekter ved undervisningen. Når læreren ønsker å støtte elevenes bevissthet rundt språklige registre, handler stillasbygging på makro- og mikronivå særlig om følgende aspekter.

Macro scaffolding:

- *Bygge på elevenes forkunnskaper og erfaringer:* læreren planlegger læringsmuligheter som bygger på elevenes forkunnskaper og erfaringer, både når det gjelder språkkunnskaper og forståelse av matematiske begreper, og gir muligheter til å videreutvikle disse.
- *Utvalg og rekkefølge av oppgaver:* læreren utformer oppgaver og læringsmuligheter som benytter seg av alle de tre språklige registrene, dvs. hverdagsregisteret, skoleregisteret og det tekniske registeret. For eksempel kan forklaringer som er formulert i hverdagsregisteret benyttes som et stillas for å konstruere en mer abstrakt begrepsforståelse og for å støtte utviklingen av kommunikasjonsferdigheter innenfor de to mer formelle språklige registrene. Oppgaver kan og skal utformes slik at registrene relateres til hverandre på alle måtene som er vist i tabellen over.
- *Skape metalingvistisk og metakognitiv bevissthet:* skape anledninger, der elevene bevisst reflekterer rundt språklige uttrykksmåter i sammenheng med matematisk innhold. Når nye matematiske begreper innføres, kan det eksempelvis arbeides systematisk med konkrete og mer abstrakte situasjoner, samtidig som læreren får elevene til å reflektere over de tilhørende språklige uttryksformene og skaper muligheter for at elevene kan relatere disse til hverandre.


Micro scaffolding:





- *Koble innholdet i undervisningen til tidligere erfaringer:* læreren kobler undervisningens innhold til tidligere språklige og matematiske kunnskaper og erfaringer hos elevene og refererer til disse i undervisningssamtalen.
- *Stimulere til aktiv elevdeltakelse:* læreren oppmuntrer elevene til å bidra med ideer, ytringer, utdypende forklaringer osv.
- *Omarbeiding og reformulering:* med utgangspunkt i elevenes ideer og uttrykksmåter søker læreren å omarbeide, videreutvikle og reformulere elevenes bidrag slik at alle registrene blir benyttet i undervisningssamtalen.

Figurene nedenfor viser eksempler på oppgaver innenfor temaet brøk som er utformet av Prediger og Wessel (2013) etter de ovennevnte prinsippene for stillasbygging på makronivå og som gir elevene muligheter til aktiv og systematisk bruk av ulike registre.

Parts of a Chocolate Bar

a) Kenan and his friends share a chocolate bar. He wants to know which part he gets when he shares with one friend, or with two, three or four friends. He prepared the following table. Complete the table.



Chocolate bar divided by friends:	My Picture	Kenan gets:
1 bar - 2 friends		$\frac{1}{2}$
1 bar - 3 friends		<input type="text"/>
1 bar - 4 friends		<input type="text"/>
1 bar - 5 friends		<input type="text"/>


b) Examine the table carefully and consider the following:




- What happens with Kenan's part of the chocolate bar?
- Why does Kenan's part of the chocolate bar change?

Typical activity: systematic variation in different registers

More and more fifth

c) Now Kenan produces fifths with fraction bars. Complete the table.



Anteil that Kenan wants to draw:	My Picture
$\frac{1}{5}$	
$\frac{2}{5}$	
....	[the original work sheet has lines for $\frac{3}{5}$ and $\frac{4}{5}$ here]
$\frac{5}{5}$	

d) Examine the table precisely and consider the following:

- What happens with the coloured part of the fraction bar?
- Why does the coloured part change?

e) Your research:

- How and why does the Anteil change?
- Write down your findings so that another student can understand what is happening with the Anteil and why the Anteil changes.
- You can use the following words:

What changes?	How does it change?
- the numerator	- more
- the denominator	- less
- the number of friends	- bigger
- the number of chocolate bars	- smaller
	- the same

Typical macro scaffolding: first orally, then in written form with a scaffold

Referanser:

Prediger, S., & Wessel, L. (2013). Fostering German-language learners' constructions of meanings for fractions—design and effects of a language-and mathematics-integrated intervention. *Mathematics Education Research Journal*, 25(3), 435-456.

Prediger, S., & Wessel, L. (2011). Relating registers for fractions—multilingual learners on their way to conceptual understanding. In M. Setati, T. Nkambule, & L. Goosen (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 21—mathematics and language diversity* (pp. 324–333). Sao Paulo, Brazil

Wessel, L., Büchter, A., & Prediger, S. (2018). Weil Sprache zählt – Sprachsensibel Mathematikunterricht planen, durchführen und auswerten. *Mathematik lehren*, 206, 2-7.