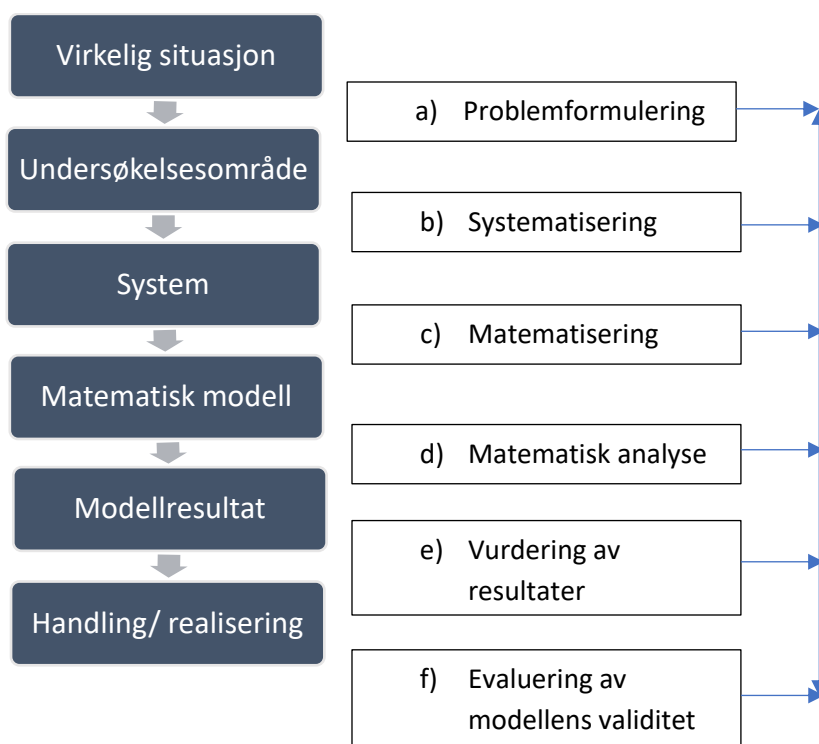


## Ressurshefte for didaktisk modellering

En matematisk modelleringsprosess er en prosess hvor et fenomen eller en situasjon fra den fysiske eller sosiale verden, beskrives, kategoriseres, måles, vurderes og analyseres ved hjelp av matematiske symboler og sammenhenger. Matematiske modeller er integrert i så godt som alle tekniske, økonomiske og naturvitenskapelige disipliner (Hana, 2013: s.199-201) og i samfunnet brukes modeller for å analysere situasjoner som angår for eksempel økonomiutvikling, befolkningsutvikling, arbeidsledighet, boligbygging, trafikkplanlegging eller klimatiltak.

I skolens undervisning kan en foreta didaktiske modelleringsprosesser som tar mer eller mindre direkte utgangspunkt i elevers kunnskaper, erfaringer og interesser. Når en skal utarbeide et didaktisk modelleringsopplegg, startes det ofte med å velge et problem basert på en situasjon fra elevenes fysiske eller sosiale verden. Deretter legges det opp til at elevene ved å gjennomgå en modelleringsprosess skal finne en eller flere løsninger på problemet. Under vises Blomhøj's stadiemodell som beskriver oftest forekommende stadier i slike modelleringsprosesser.



Elevene kan her gå frem og tilbake mellom stadiene a) – f) og trenger ikke nødvendigvis å være innom alle. Stadiene trenger heller ikke å gjennomløpes i rekkefølge, hvilket er indikert ved pilene til høyre i figuren. For mer utfyllende beskrivelser av denne fremstillingen av en modelleringsprosess sammen med eksempler på hva den kan inneholde, se (Blomhøj, 2003) eller (Hansen, 2012ab).

**Forberedelse av modelleringsopplegg** Når en som lærer skal utarbeide et didaktisk modelleringsopplegg kan en tenke spesielt over hvordan en vil forholde seg til

1. Presentasjonen av situasjonen som det skal utarbeides et modelleringsproblem fra. Hvordan kan en ut fra en gitt situasjon sammen med klassen komme frem til et

modelleringsproblem, eller eventuelt presentere et slikt for klassen? For lave trinn kan fortellinger eller bilder brukes for å presentere problemet. At elevene på dette punktet dessuten lager hypoteser om løsningen på modelleringsproblemet, kan være nyttig for å motivere dem til videre arbeid med det. I (Hana, 2013: s. 213 – 222) er flere forslag til problemstillinger for modellering oppført, sammen med seks prinsipper for design av modelleringsaktiviteter.

2. Eventuell avgrensning av modelleringsproblemet. Noen ganger må modelleringsproblemet avgrenses. Dette kan være tilfelle hvis elever for eksempel skal finne ut hva den mest typiske skostørrelsen for fjerdeklassinger er. Da kan det være at en må nøye seg med å undersøke opp til to-tre fjerdeklassinger. Hvordan kan elevene få mulighet til å delta i slike avgrensninger?
3. Hvordan eventuelle datainnsamlinger som trengs for å undersøke modelleringsproblemet kan foregå.
4. Hvilke metoder elever kan tenkes å bruke for å finne et eller flere svar på modelleringsproblemet.
5. Hvordan en kan legge til rette for at elever selv skal kunne velge både formelle og uformelle representasjonsformer og tegn når de utforsker modelleringsproblemet. Eksempel på formelle representasjonsformer er velkjente matematiske uttrykk og fremstillinger, mens uformelle representasjonsformer inngår i form av tegning, fingrer, konkrete, eller selvutviklede symboler.
6. Hvordan elevers matematiske argumentasjon kan tenkes å fremstå under modelleringsprosessen.
7. Hvordan sammenlikning av modellresultater kan foregå. Elevgrupper bør få anledning til å sammenlikne modelleringsresultater og hvis mulig sammenlikne dem med et eksperiment som viser praktisk utvikling av den modellerte situasjonen.
8. Hvordan elever kan tenkes å forholde seg til feilkilder. Dette kan være målefeil, overslagsberegninger eller matematiske likninger som må forenkles for å klare å gjennomføre modelleringsprosessen.
9. Hvordan elevene skal legge frem resultatene sine i etterkant av prosessen. Her kan resultatene legges frem på ulike måter, som f.eks. poster eller gruppepresentasjon. For at reflekterende samtaler om modelleringsprosessen skal oppstå, er det viktig at elevene får anledning til å diskutere resultater fra ulike elevgrupper opp mot hverandre.

Generelt skal elevene arbeide mest mulig selvstendig gjennom modelleringsprosessen, men læreren bør tenke nøye gjennom hvordan hun eller han kan veilede dem.

**Eksempler på didaktiske modelleringsopplegg** Eksempel på et didaktisk modelleringsopplegg kan være å legge til rette for at elever kan utforme en oversikt (f.eks. diagram/ tabell) over målinger av et fenomen over en tidsperiode. Fenomenet kan for eksempel være timer til en fritidsaktivitet per dag. Det legges samtidig til rette for at elevene kan gjøre kritiske vurderinger og matematiske analyser av hvordan de innretter fritiden. Dette kan innebære å bruke velkjente matematiske begreper som eksempelvis gjennomsnitt for å si noe om typiske forekomster av fenomenet. Når det gjelder fritidsaktiviteter finner elevene kanskje ut at aktivitetene typisk er konsentrert i helger, slik at et vanlig aritmetisk gjennomsnitt ikke forteller så mye om hvordan elever innretter fritiden. Elevene kan da oppfordres til å resonnerer på andre måter, og slik utvikle sin matematiske og kritiske kompetanse.

Et annet eksempel kan være å studere en situasjons fremtidige utvikling. For eksempel kan elever studere hvordan temperatur utvikler seg i varm drikke når tiden går. Ved å plotte

variablene tid og temperatur over en tidsperiode kan elevene bruke fremstillingen til å studere trender som antyder hvor lang tid det kan ta før drikken er kald. Her kan for eksempel det matematiske begrepet funksjon settes i sammenheng med både gjennomsnittlig og øyeblikkelig endring av temperaturen. Vilkårige eksempler på andre fenomener elever kan studere tidsutviklinger av, kan være nedbør, idrettsprestasjoner, elevantall, arbeidsledighet og salgshistorikk.

Et eksempel på modellering fra den sosiale verden kan være at elever lager et spørreskjema som kategoriserer hvor positive informanter er til et sosialt fenomen, eksempelvis bybaneutvikling, bompenger eller antall lekeapparater en bør ha på skoleplassen. Svardiagrammene kan analyseres kritisk i relasjon til typiske svar, som elevene finner ved ulike statistiske sentralmål.

Et par utfyllende eksempler på modelleringsoppgaver sammen med lærerveiledninger er gitt i Vedlegg 1–3. Det første er det som kalles et Fermi-problem, se [https://en.wikipedia.org/wiki/Fermi\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Fermi_problem). Dette er problemer som handler om å gjøre de første grove overslagene over størrelser som det er vanskelig å måle direkte, og slik kan ses i sammenheng med modellering. Det andre er kun inspirert av et Fermi-problem, hvor det opprinnelige Fermi-problemet var å finne høyden til eier av kjempeskoen. Det siste eksempelet kan relateres flere ulike læringsmål lærere kan ha med modellering, som for eksempel at elever skal bli i stand til å studere endring som et matematisk begrep, sette opp variabelsammenhenger, generalisere, lage egne representasjoner eller forholde seg kritisk til generaliseringer en foretar ut fra mindre eksperimenter.

Du vil få vite mer om modellering i forelesningene.

## LITTERATURLISTE

### Bakgrunns litteratur

- Blomhøj, M. (2003). Modellering som undervisningsform. I O. Skovsmose og M. Blomhøj (Red.) *Kan det virkelig passe? – om matematikklæring*. København: L&R Uddannelse.
- Hana, G. (2013). *Matematiske byggesteiner*. Kap.5. Caspar forlag.
- Hansen, R. & Hana, G. M. (2013). «Det er ikke mulig å gjøre dette før ...» Modellering plassering i undervisningsforløp. I *Lærings samtalen i matematikkfagets praksis – bok 2*. s. 153-170. Caspar forlag.
- Hansen, R. (2012a). Modellering og kritisk demokratisk kompetanse. I *Lærings samtalen i matematikkfagets praksis – bok 1*. s. 195-204. Caspar forlag.
- Hansen, R. (2012b). Hva sier egentlig prognosene – kritisk kompetanse om modeller og miljø. I *Lærings samtalen i matematikkfagets praksis – bok 1*. s. 185-194. Caspar forlag.

### Artikler (norsk, eksempler fra praksis)

- Blomhøj & Skånstøm (2006). Matematikkmorgener. I O. Skovsmose og M. Blomhøj (Red.) *Kunne det tænkes? – om matematikklæring*. Forlag Mallings-Beck.
- Hana, G. (2013). *Matematiske byggesteiner*. Kap.5. Caspar forlag.
- Erfjord, I. (2005). Matematisk modellering. Inspirasjonshefte, Tangenten 2005.
- Fyhn, Teig & Pedersen (2016). Musikk og fotball – matematikk i småskolen. *Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning*, 27(4).

- Nordheim (2012). Proporsjoner i kjempenes land. *Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning*, 28(2).
- Wallace & Jensen (2017). Matematikk i tre akter. *Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning*, 28(3).
- Rangnes, T. (2007). Vekst og grafer – modellering sammen med 8-9-åringer. *Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning*, 18(4).
- Rakstang, Anna. (2017). Modellering og kritisk demokratisk kompetanse. Masteroppgave HVL. Bergen. [https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/2481619/Masterthesis\\_Rakstang.pdf?sequence=2](https://brage.bibsys.no/xmlui/bitstream/handle/11250/2481619/Masterthesis_Rakstang.pdf?sequence=2)
- Wæge, K. & Rossing, N.K. (2007). Strikkhopp med Barbie. *Tangenten: tidsskrift for matematikkundervisning*, 18(4), s. 19-23.
- Nysgjerrigperprisen (2015), Haus skole. Kva meiner ein med skritt som lengdemål, og kor mange skritt går vi egentleg på ei veke?  
[https://nysgjerrigper.no/filearchive/v\\_haus\\_skule\\_-\\_skrittlengde.pdf](https://nysgjerrigper.no/filearchive/v_haus_skule_-_skrittlengde.pdf)
- Film fra Nysgjerrigperprisen [https://www.youtube.com/watch?v=LZvn\\_zRpu1I&t=16s](https://www.youtube.com/watch?v=LZvn_zRpu1I&t=16s)
- Film om modellering - strikkhopp  
<https://www.matematikkseieret.no/læringsressurser/grunnskole/filmer-fra-skole-i-praksis>

### Artikler (engelsk)

- Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: a socio-critical and discursive perspective. *ZDM*, 38(3), 293-301.
- Barbosa, J. C. (2008). Mathematical modelling, the socio-critical perspective and the reflexive discussions.
- Bonotto, C. (2010). Engaging students in mathematical modelling and problem posing activities. *JMMA*, vol 1, no 3.
- Bonotto, C. (2010). Realistic mathematical modelling and problem posing.  
[https://www.researchgate.net/publication/227253503\\_Realistic\\_Mathematical\\_Modelling\\_and\\_Problem\\_Posing](https://www.researchgate.net/publication/227253503_Realistic_Mathematical_Modelling_and_Problem_Posing)
- Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, 1(1), 45-58.
- English, L. (2010). Young childrens' early modelling with data.
- English, L. (2010). Modelling with complex data in the primary school. In Lesh et al.
- English, L. (2006). Introducing young children to complex systems through modelling.
- English, L. (1997). The development of fifth grade children problem posing abilities. *ESM*.
- Skovsmose, O. & Borba, M. (2000). *Research Methodology and Critical Mathematics Education*. The Authors, 17, 1-23.

Vedlegg

### Modelleringsproblem 1

*Hvor mange biler står i en bilkø?*

#### Lærerveiledning

Elevene kan i samråd med lærer komme frem til en vei som de vil relatere undersøkelsen til. Dette kan være en vei i nærheten av skolen, eller et annet sted. De kan måle lengden av veien

f.eks. ved hjelp av gulesider.no. Før elevene starter «den virkelige modelleringsprosessen» kan de lage en pilot på problemet. Her bør elevene få bruke sine egne representasjoner. Dette kan være lekebiler, tegning av biler, symboler, tall, ... etc.

Det overordnede målet med aktiviteten er at elevene skal få kompetanse til å matematisere og formulere en løsning på et problem fra virkeligheten (her: hvor mange biler som står i en kø). Elevene skal bruke egne representasjoner eller matematiske symboler for fysiske størrelser, som eksempelvis billengde og avstand mellom biler. En kan starte med antakelsen at veien er rett, alle biler har samme lengde og samme avstand mellom seg. Elever som kommer lett videre fra denne situasjonen, kan utfordres til å reflektere over hvordan en kan symbolisere f.eks. billengde ved f.eks. «Lengde»,  $L$ ,  $x$ , ... eller liknende. Et delmål kan være at enkelte elever blir i stand til å sette opp matematiske sammenhenger på formen  $n = s/x$ , der  $n$  er antall biler,  $x$  billengde og  $s$  veilengde, og reflektere over hvordan  $n$  endrer seg med endring av variablene  $s$  og  $x$ . En kan deretter komme inn på hva som vil skje hvis veien har en eller flere svinger. Dette problemet kan evt. gis som et geometriproblem som involverer sirkler og omkrets.

## **Modelleringsproblem 2**

*Kan det være en sammenheng mellom kroppshøyde og skostørrelse?*

### Lærerveiledning

Dette modelleringsproblemet kan for eksempel introduseres ved å vise et bilde av en kjempestor sko, og utfordre elevene til å reflektere over hvor høy personen som eier skoen kan være.

Det overordnede målet med aktiviteten er at elevene skal bli i stand til å matematisere og formulere en løsning på et problem fra virkeligheten (her: Om det er sammenheng mellom høyde og skostørrelse). Et delmål som inngår er at elevene skal bli i stand til å sette opp og reflektere over en eventuell sammenheng mellom to variable (i dette tilfellet  $h$  og  $l$ ).

Elevene kan først gjøre en pilot på problemet. Dette gjør de ved å lage en tenkt oversikt over hvor mange elever som har en viss skostørrelse i klassen/ deler av klassen og høyden til disse. Her bør elevene veiledes i retning av å sette dette opp i en tabell, eller en form for tegning/diagram. De bør få velge representasjonsform selv. Deretter måler elevene de faktiske verdiene av disse størrelsene i klassen. Elevene kan f.eks. gå to sammen og måle hverandres høyde og skostørrelse. Så sammenlikner elevene sine piloter med de faktiske målingene i klassen og elevgruppene reflekterer sammen med lærer og resten av klassen over resultatene.

Deretter kan piloten utvides slik at en spør:

- a. Hva hvis vi hadde spurt to klasser?
- b. Hva hvis vi hadde spurt hele Bergen?

Elevene reflekterer sammen med læreren over disse spørsmålene.

### **Modelleringsproblem 3**

*Hvilken blir først kald, kakaoen i den lille eller i den store koppen?*

#### Lærerveiledning

Dette modelleringsproblemet kan gjennomføres i forbindelse med en klassetur, eller elevene kan få det presentert som en fortelling om en klasse som skal på tur med kakao på termos.

Målet med denne modelleringsaktiviteten er at elevene skal bli i stand til å matematisere og formulere en løsning på et problem fra virkeligheten (her: hvilken kopp som først taper varme). Et delmål er at de skal kunne sette opp fysiske sammenhenger mellom to variable (her: tid og temperatur) i en eller annen form for representasjon. Dette kan være en form for tegning, tabell, eller diagram.

Deretter kan en utvide aktiviteten til en samtale om temperaturavkjøling i innsjøer eller i store og små rom. Målet med dette er at elevene skal bli i stand til å samtale om begreper som økning/ stigning, minking/ avtaking på generelt grunnlag.

Forslag til læringsmål (LK06) som kan settes i sammenheng med aktivitetene, hvis 4. trinn:

- finne informasjon i tekstar eller praktiske sammenhenger, velje rekneart og grunnleggende valet, bruke tabellkunnskap og utnytte sammenhenger mellom rekneartene, vurdere resultatet og presentere løsningen
- samle, sortere, notere og illustrere data på formålstilpassede måter med teljestreker, tabellar og søylediagram, med og uten digitale verktøy, og samtale om prosess og framstilling

Forslag til læringsmål (LK06) som kan settes i sammenheng med aktivitetene, hvis 7. trinn:

- finne informasjon i tekstar eller praktiske sammenhenger, stille opp og forklare beregninger og framgangsmåter, vurdere resultatet og presentere og diskutere løsningen
- bruke målestokk til å beregne avstander og lage og samtale om kart og arbeidsteikningar, med og uten digitale verktøy
- planlegge og samle inn data i samband med observasjonar, spørjeundersøkingar og eksperiment
- samanlikne storleikar ved hjelp av høvelege målereiskapar og enkel berekning, presentere resultatata og vurdere om dei er rimelege
- samle, sortere, notere og illustrere data på formålstilpassede måter med teljestrekar, tabellar og søylediagram, med og utan digitale verktøy, og samtale om prosess og framstilling