Oppgavesamling

Kontrolloppgaver

MAT101 - Brukerkurs i matematikk

Amir Hashemi

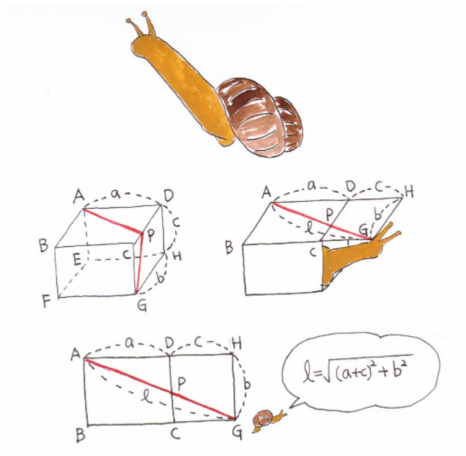
Eventuelle kommentarer tas imot med glede: ahas@hvl.no
Eventuelle feil legges ut her:
http://home.hib.no/ansatte/ahas/mat101/feil/

Kontrolloppgaver

Dette heftet er en oppgavesamling for lærestoffet i emner i Brukerkurs i matematikk (MAT101)
Det er ikke ment at denne oppgavesamlingen skal dekke pensum i de nevnte emner men skal hjelpe studentene å repetere de vitkige og sentrale delene.
Du skal ikke regne disse oppgavene før du har lest teorien og har regnet oppgavene på oppgavelisten fra læreboken

Forord

Å lære hvordan å løse problemer i matematikk er å vite hva du skal se etter. Matematiske problemer krever ofte etablerte prosedyrer og vite hva og når man skal bruke dem. Her er det en del tips hvordan man skal løse et problem.



1. Les oppgaven og forstå problemet:
• Les problemet nøye flere ganger. Hva blir du bedt om å finne eller vise?
• Kan du omformulere problemet med dine egne ord?
• Kan du tenke deg et bilde eller et diagram som kan hjelpe deg å forstå problemet?
• Spør deg selv, hvilke metoder, teorier kan brukes her?

2. Legg et Plan:
• Velg dine strategier for å løse dette problemet.
• Prøv ut dine strategier. (Bruke formler, forenkle, bruk skisser, gjette og sjekke, se etter et mønster, osv.)
• Hvis strategien ikke fungerer, kan det lede deg til en "aha"øyeblikk og til en strategi som fungerer.

3. Løs:
• Bruk dine strategier for å løse problemet.

4. Kontroller og reflekter:
• Se gjennom framgangsmåten og løsningsmetoden.
• Ser svaret fornuftig ut?

Kontrolloppgaver - Kapittel 1

Skriv så enkelt som mulig:

a) $\dfrac{x}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}$ c) $\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x-\sqrt{x}}$

Oppgave 2

Skriv så enkelt som mulig:

a) $\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}:\sqrt[6]{x}$ b) $\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}$ c) $\dfrac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}:\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$

Oppgave 3

Skriv følgende tall som et rasjonalt tall: $\dfrac{p}{q}$ der og p, q er hele tall og $q \neq 0$.

i) 2,151515... ii) 2,3151515... iii) 2,34151515...

Oppgave 4

1. En verdi vokser først med 20 % og deretter med 25 %.
   Hvor mange prosent har verdien vokst?

2. Prisen til en vare settes ned først med 20 % og deretter med 25 %.
   Hvor mange prosent har prisen synket?

Oppgave 5

Volumet til en kule med radius r er gitt ved $V=\dfrac{4\pi}{3}r^3$.

a) Sett opp volumet når $r=R_0$, $r=2R_0$ og $r=3R_0$.
Bestem den absolutte og relative endringen til volumet når radien er
i) fordoblet ii) tredoblet.

b) Bestem radien r fra (1) uttrykt ved V .
Bestem den absolutte og relative endringen til radien når volumet er
i) fordoblet ii) tredoblet.

Oppgave 6

a) En størrelse øker fra verdien A til (3,17)A.
  i) Bestem den absolutte tilveksten.
  ii) Hvor stor er den relative økningen?
  iii) Bestem vekstfaktor.

b) Radien til en kule vokser fra 10 cm til 10,2 cm.
  i) Hvor mange prosent har radien økt?

ii) Hvor mange prosent øker overflaten?
iii) Hvor mange prosent øker volumet?

Oppgave 7
Løs ligningene:

a) $(1+\dfrac{x}{100})^{29} = 20,000.$

b) $\sqrt{4x+\sqrt{x-1}} = 3$

c) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 2$, der $x \neq 0$.

Oppgave 8

Avgjør om implikasjonen gjelder (sann eller usann):

a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \wedge y = -1$

b) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \wedge y = -1$

c) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \vee y = -1$

d) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \vee y = -1$

Oppgave 9

a) Vis at hvis n er et odde tall, så er n^2 er et oddetall.

b) Hva er kontrapositivt bevis ?
Vis at hvis n^2 er et oddetall, så er n er et oddetall.

c) Vi har utsagnene:

e: *Jeg har eksamen snart* **l**: *Jeg leser mye*.

i) Skriv følgende utsagn ved bruk av **e**, **l** og konnektiver:
Jeg har ikke eksamen snart og leser ikke mye.

(ii) Gi en verbal formulering for det sammensatte utsagnet **e** ⇒ **l**.
Gi en formulering av negasjonen til utsgnet. Uttrykk først negasjonen ved bruk av **e**, **l** og konnektiver. Lag deretter en verbal formulering.

d) Anta p er usann. Angi sannhetsverdi til følgende sammensatte utsagn:
i) $p \wedge (\neg p \vee q)$ ii) $p \Rightarrow q$ iii) $\neg p \vee q \Rightarrow p \wedge q$

Oppgave 10

a) Vis at polynomet $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ er delelig med $x - 2$ og $x + 2$.

b) Bestem restleddet til polynomdivisjonen $P(x) = x^3 - 7x - 2 : x - 3$.

c) Bestem r uten å utføre divisjon:

$$\frac{x^3 + 3x^2 - 4x - 7}{x + 3} = q(x) + \frac{r}{x + 3}$$

Gjennomfør divisjonen og bestem $q(x)$.

d) Gitt $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2}{x^2 + 2}$.
Funksjonen har en skrå asymptote. Bestem denne ved polynomdivisjon.

Hint:
Noen rasjonale funksjoner kan ha skrå asymptote.
Hvis differansen mellom største grad i telleren og nevneren er nøyakig 1, har den rasjonale funksjonen skrå asymptote:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = ax + b + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

$y = ax + b$ kalles for skrå asymptote.

Eksempel:
Gitt $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 2}$. Ved polynomdivisjon får vi:

$$\begin{array}{l} \big(\ \ x^3 \qquad\quad +1\big) \div \big(x^2 + 2\big) = x + \dfrac{-2x + 1}{x^2 + 2} \\ \underline{-x^3 - 2x} \\ \qquad\ \ -2x \end{array}$$

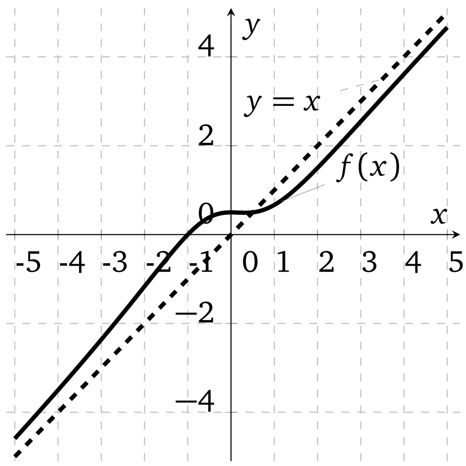
Vi kan da skrive: $f(x) = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 + 2} = x + \dfrac{-2x + 1}{x^2 + 2}$.

$y = x$ er skrå asymptote:

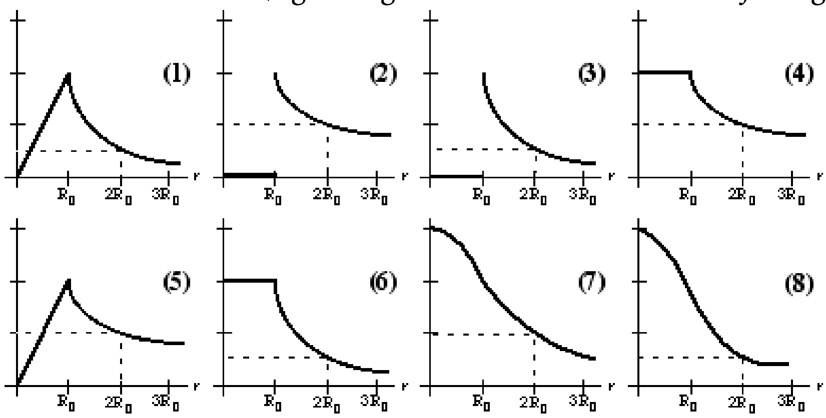
$$\lim_{x \to \infty} f(x) \to x$$

Oppgave 11

La $f(r) = \begin{cases} \dfrac{2R_0^2}{r^2} & \text{for } r \geq R_0 \\ 0 & \text{for } r < R_0 \end{cases}$.



Bestem hvilken av følgende grafer som viser kurven til f. Begrunn svaret.



Fasit - Kontrolloppgaver- Kapittel 1

Oppgave 1

a) $\dfrac{x}{x^2-9}-\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{x}{(x-3)(x+3)}-\dfrac{x+3}{(x-3)(x+3)}=-\dfrac{3}{x^2-9}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}-\dfrac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{2}{(\sqrt{3})^2-1^2}$
$=1$

c) $\dfrac{x\sqrt{x}-x}{x-\sqrt{x}}=\dfrac{x(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}=\dfrac{x}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}$

Oppgave 2

a) $\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}:\sqrt[6]{x}=x^{(1+\frac{1}{2})-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=x^{\frac{6+3-2-1}{6}}=x.$

b) $\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a\sqrt[3]{a^2}}}=a^{(1+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}(1+\frac{2}{3})}=a^{\frac{6+3-(3+2)}{6}}=a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}.$

c) $\dfrac{x\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}:\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=x^{(1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2})-(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3})}=x^{\frac{6+4-3-(6+3-2)}{6}}=x^0=1$

Oppgave 3

i)

$a=2,151515...$

$100a=215,151515...$

Vi kan da få: $100a-a=215,1515...-2,1515...=213$, eller
$a=\dfrac{213}{99}=\dfrac{71}{33}.$

ii)

$a=2,3151515...$

$10a=23,151515...$

$1000a=2315,1515...$

Vi kan da få: $1000a-10a=2315,1515...-23,1515...=2292$, eller
$a=\dfrac{2292}{990}=\dfrac{382}{165}.$

iii)

$a=2,34151515...$

$100a=234,151515...$

$10000a=23415,1515...$

Vi kan da få: $10000a-100a=23415,1515...-234,1515...=23181$, eller
$a=\dfrac{23181}{9900}=\dfrac{7727}{3300}.$

Oppgave 4

a) $\dfrac{1,25(1,20A)-A}{A}\cdot 100=50$. Verdien vokser da med 50 %.

b) $\dfrac{0,75(0,8A)-A}{A}\cdot 100 = -40$. Verdien synker da med 40 %.

Oppgave 5

a) $V = \dfrac{4\pi}{3}r^3$

Radien	Volum	Absolutt endring	Relativ endring
$r_1 = R_0:$	$V_1 = \dfrac{4\pi}{3}R_0^3$		
$r_2 = 2R_0:$	$V_2 = \dfrac{32\pi}{3}R_0^3$	i) $V_2 - V_1 = \dfrac{28\pi}{3}R_0^3.$	i) $\dfrac{V_2 - V_1}{V_1} = 7$
$r_3 = 3R_0:$	$V_3 = \dfrac{108\pi}{3}R_0^3$	ii) $V_3 - V_1 = \dfrac{104\pi}{3}R_0^3.$	ii) $\dfrac{V_3 - V_1}{V_1} = 26$

Det vil si at volumet er steget med 700 % og 2600 % når radien er fordoblet og tredoblet.

b) $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$

Radien	Volum	Absolutt endring	Relativ endring
$V_1 = V_1:$	$R_1 = \sqrt[3]{\dfrac{3V_1}{4\pi}}$		
$V_2 = 2V_1:$	$R_2 = \sqrt[3]{\dfrac{6V_1}{4\pi}}$	i) $R_2 - R_1 = \sqrt[3]{\dfrac{3V_1}{4\pi}}(\sqrt[3]{2}-1).$	i) $\dfrac{R_2 - R_1}{R_1} = \sqrt[3]{2}-1 \simeq 0.26$
$V_3 = 3V_1:$	$R_3 = \sqrt[3]{\dfrac{9V_1}{4\pi}}$	ii) $R_3 - R_1 = \sqrt[3]{\dfrac{3V_1}{4\pi}}(\sqrt[3]{3}-1).$	ii) $\dfrac{R_3 - R_1}{R_1} = \sqrt[3]{3}-1 \simeq 0.442$

Det vil si at radien er steget med 26 % og 44,2 % når volumet er fordoblet og tredoblet.

Oppgave 6

a) i) 2,17 A ii) 2,17 (217 %) iii) 3,17

b) i) $\dfrac{r_2 - r_1}{r_1} = 2\%$

ii) $\dfrac{S_2 - S_1}{S_1} = \dfrac{4\pi(10,2^2 - 10^2)}{4\pi 10^2} \simeq 4\%$

iii) $\dfrac{V_2 - V_1}{V_1} = \dfrac{\frac{4\pi}{3}(10,2^3 - 10^3)}{4\pi 10^3} \simeq 6,1\%$

Oppgave 7

a) $(1 + \frac{x}{100})^{29} = 20,000.$

$x = 100(20,000^{1/29} - 1) \simeq 40,7$

b) $\sqrt{4x + \sqrt{x-1}} = 3$
$\sqrt{x-1} = 9 - 4x$
$x - 1 = (9-4x)^2 = 81 - 72x + 16x^2$
$16x^2 - 73x + 82 = 0$
$16(x-2)(x-2,5625) = 0$,
$x = 2 \vee x = 2,5625$. Sjekker svarene og dermed $x = 2$ er rett svar.

c) $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2$, der $x \neq 0$.
Multipliserer begge sider med $\sqrt{x}$ ($x \neq 0$):
$x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ og dermed $x = 1$.

Oppgave 8

Avgjør om implikasjonen gjelder (sann eller usann):

a) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \wedge y = -1$ Sann

b) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \wedge y = -1$ Sann

c) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \vee y = -1$ Sann

d) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 \vee y = -1$ Usann
Legg merke til at i del d) hvis $x = 2$ og y er noe annet enn $y = -1$, for eksempel $y = 0$, blir da $(x-2)^2 + (y+1)^2 \neq 0$ og dermed usann.

Oppgave 9

a) $n = 2k + 1$, der $k = 1, 2, \cdots$

$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2p + 1$ der p kan være et naturlig tall.

b) Kontrapositivt bevis handler om å anta at konklusjonen er usann, og finner at da er premissene det også. Når du da snur dette på hodet, har du bevist påstanden, det vil si man beviser $\neg q \Rightarrow \neg p$ istedenfor $p \Rightarrow q$.

For å vise at hvis n^2 er et oddetall, så er n er et oddetal, kan vi benytte kontrapositivt bevis: Vi kan vise hvis n er et partall, så er n^2 er et partall :

$n = 2k$, der $k = 1, 2, \cdots$
$n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) = 2p$ der p kan være et naturlig tall.

c) **i)** $\neg\mathbf{e} \wedge \neg\mathbf{l}$

(ii) Hvis jeg har eksamen, så leser jeg mye ($\mathbf{e} \Rightarrow \mathbf{l}$).
Negasjon til utsagnet er da: $\neg\mathbf{l} \Rightarrow \neg\mathbf{e}$.
Hvis jeg ikke leser mye, så har jeg ikke eksamen.

d) Anta p er usann. Angi sannhetsverdi til følgende sammensatte utsagn:
i) $p \wedge (\neg p \vee q)$ usann
ii) $p \Rightarrow q$ sann
iii) $\neg p \vee q \Rightarrow p \wedge q$ usann ($1 \Rightarrow 0$ er usann)

Oppgave 10

a) $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$ er delelig med $x - 2$ og $x + 2$ fordi:
$P(2) = 0$ og $P(-2) = 0$.

b) Restleddet er 4 : $P(3) = 4$ der $P(x) = x^3 - 7x - 2$

c) $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 7$.
Restleddet: $r = P(-3) = 5$
$q(x) = x^2 - 4$

$$
\begin{array}{l}
\big(\;\; x^3 + 3x^2 - 4x \;\; - 7\big) \div \big(x + 3\big) = x^2 - 4 + \dfrac{5}{x+3} \\
\underline{-x^3 - 3x^2} \\
\qquad\qquad -4x \;\; -7 \\
\qquad\qquad \underline{\;\; 4x + 12} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 5
\end{array}
$$

d) $y = x + 3$ er skrå asymptote:

$$
\begin{array}{l}
\big(\;\; x^3 + 3x^2 \qquad + 2\big) \div \big(x^2 + 2\big) = x + 3 + \dfrac{-2x - 4}{x^2 + 2} \\
\underline{-x^3 \qquad\; - 2x} \\
\qquad\quad 3x^2 - 2x + 2 \\
\qquad\; \underline{-3x^2 \qquad - 6} \\
\qquad\qquad -2x - 4
\end{array}
$$

Oppgave 11 I graf (2) pg (3) ser vi: $f(r) = 0$ når $r < R_0$.
$f(R_0) = 2$, $f(2R_0) = 1/2$ og $f(3R_0) = 2/9$. Dermed graf nr. 3 er rett svar.

Kontrolloppgaver - Kapittel 2

Oppgave 1

a) Hva vil det si at $y = f(x)$ er en funksjon?
Hvilken av følgende relasjoner kan beskrive en funksjon?
i) $y = x^2$ ii) $y^2 = x$ iii) $y^2 = x$, $y > 0$

b) Gitt $f(x) = x^3 + 2$ og $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$.
Regn ut $f(\sqrt[3]{2})$ og $g(29)$.
Regn ut $f(g(10))$ og $g(f(2))$.
Bestem $f(g(x))$ og $g(f(x))$. Hva kan vi si om f og g?

c) Tegn grafene: i) $f(x) = 3x + 2, \quad -2 \leq x \leq 1$ ii) $f(x) = x^2, \quad -2 \leq x \leq 2$

d) Sett opp en lineær overgangsformel fra grader til radianer gitt at 180 grader er π radianer og 0 grader er 0 radianer.

Oppgave 2

i) Bestem definisjonsmengden og verdimengden til følgende funksjoner:

a) $y = \sqrt{x-2}$ b) $y = \dfrac{1}{x-1}$

c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ d) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$

ii) Hvilke av disse kan ha invers funksjon? Bestem inverse funksjonen til disse.

Oppgave 3

Gitt ulikhetene:

a) $\begin{cases} x + 2y \leq 50 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + 2y \leq 50 \\ 3x + 4y \leq 120 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$

i) Tegn området i planet avgrenset av ulikhetene.
Bestem alle hjørner i dette området.

ii) bestem største verdien til P: $P(x, y) = 5x + 3y$ under betingelsene gitt i a) og b).

Oppgave 4
En bedrift produserer 2 ulike type vesker med, store vesker med enkel design (type A) og mindre vesker med avansert design (type B).
Produksjonen av veskene føregår ved to avdelinger, på 1. avdeling, der en jobber til 120 timeverk pr. dag, blir veskene sydd, og det tar 3 timer per veske av type A og 2 timer per veske B. På 2. avdeling blir veskene utsmykket, og her jobber en opp til 100 timeverk for dagen. Det blir 1,5 timer å gjøre ferdig veskene av type A og 2 timer for veskene av type B. Når veskene blir solgt, gir veskene av type A en fortjeneste på 100 kr per veske, mens de andre veskene gir en fortjeneste på 150 kr per veske.

a) Grunngi at ønsket å maksimere fortjeneste per dag fører til det matematiske problemet om å maksimere $P(x,y) = 100x + 150y$ når:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 120 \\ 1,5x + 2y \leq 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

b) Løs problemet.

c) Dersom bedriften hadde ressurser som skulle benyttes til å øke kapasiteten på produksjonsavdelingene, hvilken avdeling burde i den første omgang øke kapasiteten på og hvor mye? Grunngi svaret.

Fasit - Kontrolloppgaver- Kapittel 2

Oppgave 1

a) En funksjon er en relasjon som tilordner til et hvert element fra en mengde kalt definisjonsmengden til ett element i en annen mengde så kalt verdimengden.

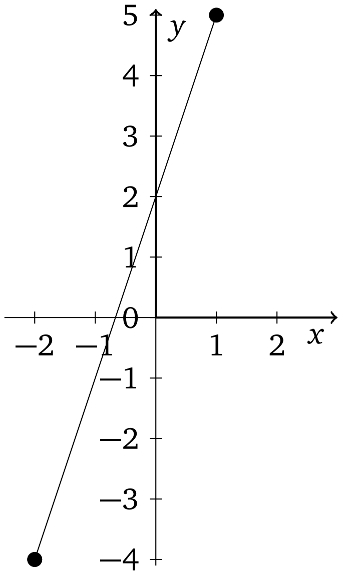
En funksjon $f : x \rightarrow y$ er en regel som til hvert element x fra definisjonsmengden D_f A tilornder ett element $y = f(x)$ i verdimengden V_f (y er bildet til x).

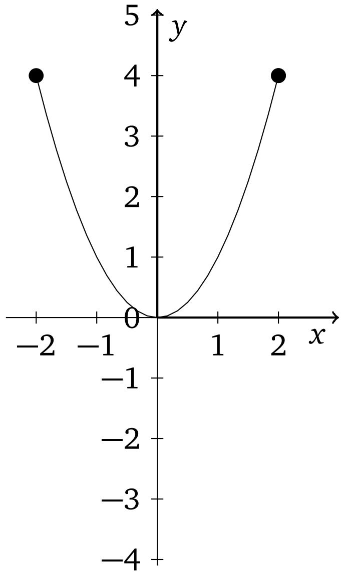
i) $y = x^2$ er en funksjon.
ii) $y^2 = x$ er ikke en funksjon fordi $y = \pm\sqrt{x}$, det vi si at et hvert element x tilordnes til to elementer.
iii) $y^2 = x$, $y > 0$ er en funksjon siden for hver y verdi finnes det bare en x verdi i definisjonsmengden. ($y = \sqrt{x}$),

b) Gitt $f(x) = x^3 + 2$ og $g(x) = \sqrt[3]{x-2}$.
$f(\sqrt[3]{2}) = 4$ og $g(29) = 3$.
$f(g(10)) = f(\sqrt[3]{10-2}) = f(2) = 10$
$g(f(2)) = g(2^3 + 2) = g(10) = 2$.

$f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-2}) = (\sqrt[3]{x-2})^3 + 2 = x - 2 + 2 = x$
$g(f(x)) = g(x^3 + 2) = \sqrt[3]{x^3 + 2 - 2} = \sqrt[3]{x^3} = x$.
f og g er inversfunksjoner: $D_f = V_g = \mathbb{R}$ og $V_f = D_g = \mathbb{R}$

c) : i) $f(x) = 3x + 2, \quad -2 \leq x \leq 1$ ii) $f(x) = x^2, \quad -2 \leq x \leq 2$





d) Ved å velge to punkt :$(D,R) = (0,0)$ og $(D,R) = (180,\pi)$ får vi :
$R = \dfrac{\pi}{180} D$ eller $D = \dfrac{180}{\pi} R$

Oppgave 2

i)

a) $y = \sqrt{x-2}$ $\qquad D_f = [2, +\infty]$ eller $D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, x \geq 2\}$
$V_f = [0, +\infty]$ eller $V_f = \{y | y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$

b) $y = \dfrac{1}{x-1}$ $\qquad D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq 1\}, V_f = \{y | y \in \mathbb{R}, y \neq 0\}$

c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ $\qquad D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 2\}, V_f = \{y | y \in \mathbb{R}, y > 0\}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ $\qquad D_f = \{x | x \in \mathbb{R}, x \neq \pm 1\}, V_f = \{y | y \in \mathbb{R} \setminus (-1, 0]\}$

ii) Alle kan ha inversfunksjoner unntatt del d) som ikke er injektiv (ikke en enytydig funksjon).

a) $y = \sqrt{x-2}$ og dermed $x = y^2 + 2$ og dermed: $y = f^{-1}(x) = x^2 + 2$.

b) $y = \dfrac{1}{x-1}$ medfører $y(x-1) = 1$ eller $x = \dfrac{y+1}{y}$, dermed :
$y = f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x} = 1 + \dfrac{1}{x}$.

c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ medfører $y^2(x-2) = 1$ eller $x = \dfrac{2y^2+1}{y^2}$, dermed :
$y = f^{-1}(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2} = 2 + \dfrac{1}{x^2}$.

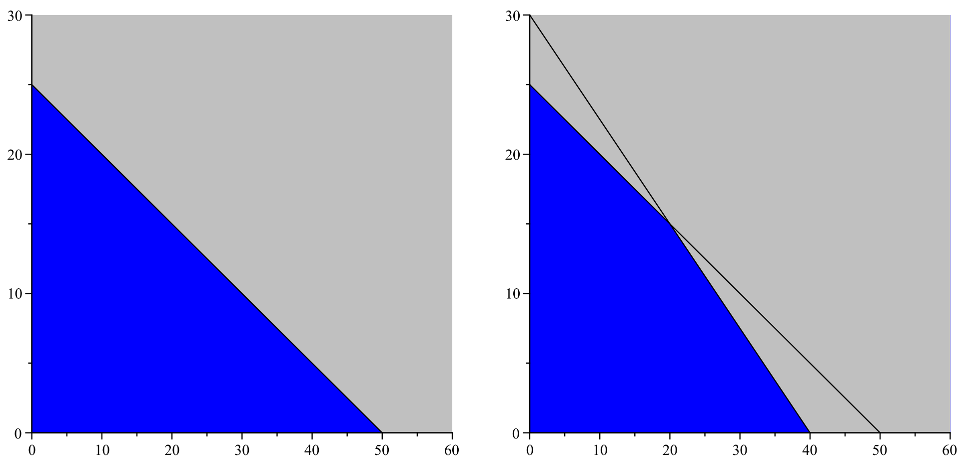
d) $y = \dfrac{1}{x^2-1}$ medfører $y(x^2-1) = 1$ eller $x^2 = \dfrac{y+1}{y}$, dermed :
$x = \pm\sqrt{\dfrac{y+1}{y}}$. Dermed funksjonen er ikke inverterbar i sin opprinnerlige definisjonsmengden.

Bermerk funksjonen kunne være injektiv for $x > 0$ og $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$ ellles

injektiv for $x < 0$ og $y = -\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

Oppgave 3

i) Det er tegnet området avgrenset av ulikhetene.



Hjørner :
a) (0,0), (50, 0) og (0, 25).
b) (0,0), (40, 0) , (20,15) og (0, 25).

ii) a) $P_{maks} = P(50,0) = 250$ b) $P_{maks} = P(40,0) = 200$

Oppgave 4

a) La x og y være antall vesker av type A og type B henholdsvis. Vi kan sette opp da problemstillingen som å maksimere $P(x,y) = 100x + 150y$ under betingelsene:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 120 \\ 1,5x + 2y \leq 100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

b) Hjørner er(40, 0) , (0 , 50) og (40/3 , 40).

$P(40,09 = 4000$

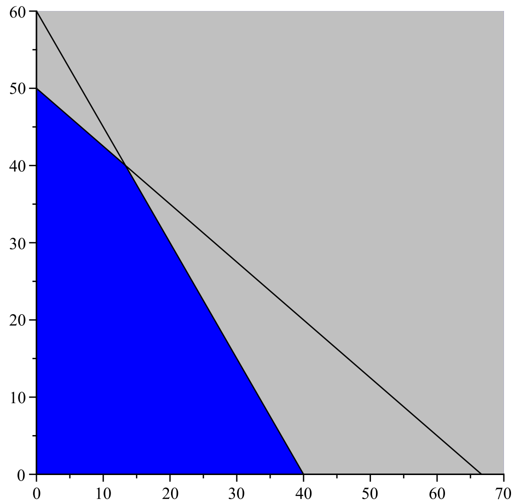
$P(0,50) = 7500$

$P(40/3,40) = 100(40/3) + 150(40) \simeq 7333$ kr.

Den optimaleverdien til P er da 7500.

c) Ved å se på betingelsene ser vi at all kapisiteten er oppbrukt på avdeling 2, mens det er ledig kapasitet på avdeling 1. En bør altså like kapasiteten på avdeling 2.

Det er ikke spurt her å tegne grafen, men det er tegnet her:



Kontrolloppgaver - Kapittel 3

Oppgave 1
I hvilken kvadrant ligger følgende vinkler(gitt i radianer)?

a) $v = 1,5^{Rad}$ b) $v = 1,7^{Rad}$ c) $v = 3^{Rad}$ d) $v = 4,6^{Rad}$

Oppgave 2

Løs ligningene når $0 \leq t \leq 2\pi$:

a) $\sin t = 0,75$ b) $\sin x = -0,75$
c) $\cos t = 0,75$ d) $\cos t = -0,75$
e) $\tan t = 2,3$ f) $\tan t = -2,3$

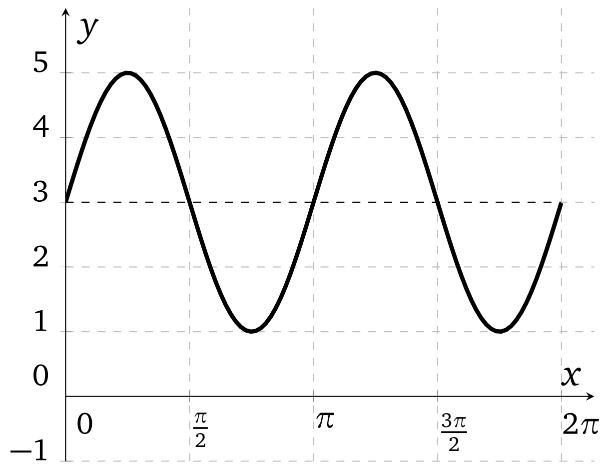
Oppgave 3
Bestem alle løsningene til ligningen $\sin x = 0,72$ der x er målt i radianer.

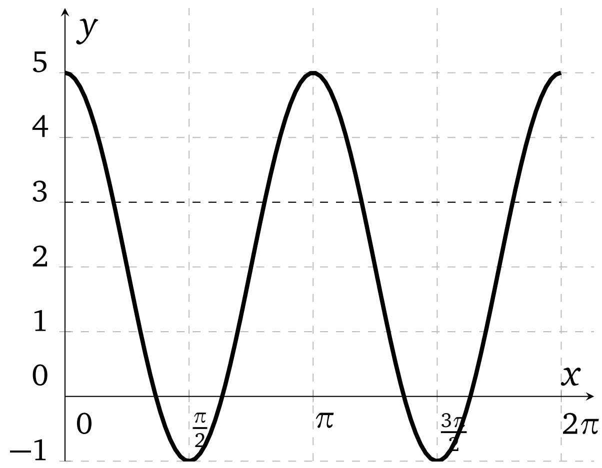
Oppgave 4

a) Tegn grafen til $F(t) = 2 + 5\sin(2t)$ og $G(t) = 2 - 5\sin(2t)$ i intervallet $[0, 2\pi]$ i samme koordinatsystem. Tegn grafen til $H(t) = 2 - 5\sin(2t - \pi)$ i $[0, 2\pi]$.
b) Hva er sammenhengen mellom $F(t)$ og $H(t)$?

Oppgave 5

Grafene til to funksjoner på formen:
$f(x) = C + A\sin(\omega(x - x_0))$ (til venstre) og
$g(x) = C + A\cos(\omega(x - x_0))$ (til høyre)
er tegnet i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ her:





Bestem C , A, ω og x_0 for hver av disse.

Oppgave 6

Skriv $f(t)$ på formen: $f(t) = C\cos\omega(t - t_0)$, der $t_0 > 0$:

a) $f(t) = -4\cos(3t) + 3\sin(3t)$

b) $f(t) = -2\sqrt{3}\sin(4t) + \sqrt{3}\cos(4t)$

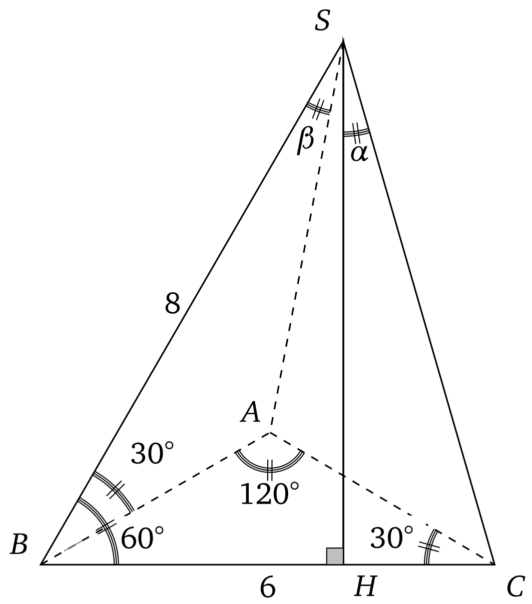
c) $f(t) = -4\cos(5t) - 3\sin(5t)$

Oppgave 7

På figuren er det gitt følgende kjente størrelser:

$$BS = 8,\ BC = 6,\ \angle SBC = 60^\circ,\ \angle BAC = 120^\circ,\ \angle SBA = \angle ACB = 30^\circ.$$

Regn ut vinklene α og β som er vist på figuren.



Oppgave 8

På en sommerdag var temperaturen i Bergen $T(t)$ målt i celsiusgrader(°) t timer etter midnatt:

$$T(t) = 18 - 6\sin(\frac{\pi}{12}t)$$

a) Bestem perioden, amplituden, og gjennomsnittstemperaturen. Tegn grafen.

b) Når på døgnet var temperaturen lavest, og når på døgnet var temperaturen høyest? Hva var temperaturene da?

c) Når på døgnet var temperaturen 21 ?

Fasit - Kontrolloppgaver - Kapittel 3

Oppgave 1

a) $v = 1,5^{Rad} < \dfrac{\pi}{2}$: første kvadrant

b) $\dfrac{\pi}{2} < 1,7^{Rad} < \pi$: andre kvadrant

c) $v = 3^{Rad} < \pi$: andre kvadrant

d) $v = 4,6^{Rad} > \dfrac{3\pi}{2}$: tredje kvadrant.

Oppgave 2 Bemerk $0 \leq t \leq 2\pi$.

a) $t_1 = \sin^{-1}(0,75) \simeq 0,85$ og $t_2 = \pi - \sin^{-1}(0,75) \simeq 2,29$

b) $t_1 = 2\pi - \sin^{-1}(0,75) \simeq 5,43$ og $t_2 = \pi - \sin^{-1}(-0,75) \simeq 4,00$

c) $t_1 = \cos^{-1}(0,75) \simeq 0,72$ og $t_2 = 2\pi - \cos^{-1}(0,75) \simeq 5,56$

d) $t_1 = \cos^{-1}(-0,75) \simeq 2,42$ og $t_2 = 2\pi - cos^{-1}(-0,75) \simeq 3,86$

e) $t_1 = \tan^{-1}(2,3) \simeq 1,16$ og $t_2 = \pi + \tan^{-1}(2,3) \simeq 4,30$

f) $t_1 = \pi + \tan^{-1}(-2,3) \simeq \pi - 1,16 \simeq 1,98$ og $t_2 = 2\pi + \tan^{-1}(-2,3) \simeq 5,12$

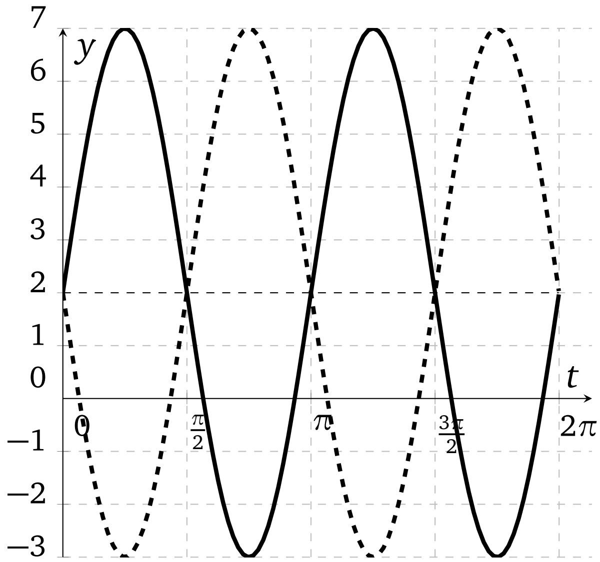
Oppgave 3 $\sin x = 0,72$.

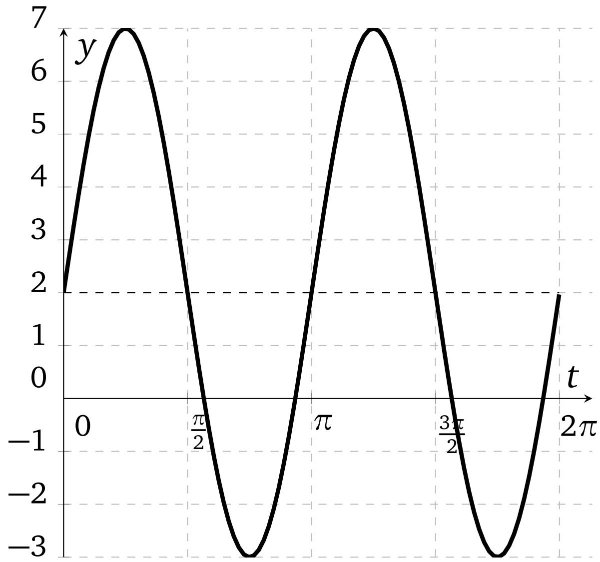
$x_1 = 2n\pi + \sin^{-1}(0,72) \simeq 2n\pi + 0,80,$

$x_2 = 2n\pi + \pi - \sin^{-1}(0,72) \simeq 2n\pi + 2,34,$ der $n = 0,1,2,\cdots$.

Oppgave 4

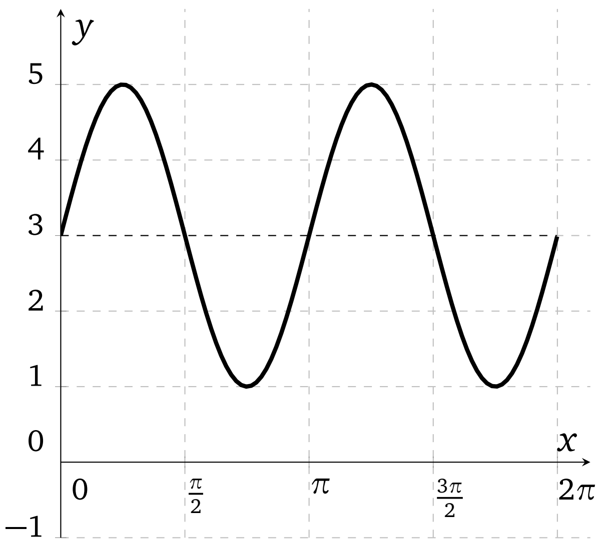
a) $F(t) = 2+5\sin(2t)$, $G(t) = 2-5\sin(2t)$ (stiplede) $H(t) = 2-5\sin(2t-\pi)$.



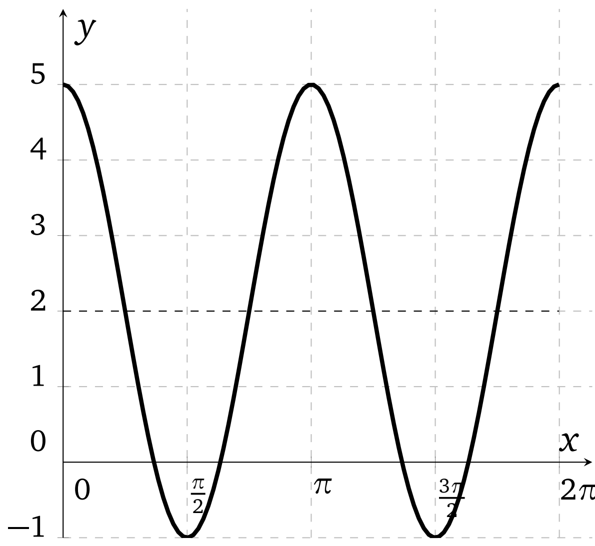


b) $F(t) = H(t)$ (de er like)

Oppgave 5



$f(x) = 3+2\sin 2x$



$g(x) = 2+3\cos 2x$

.

Oppgave 6

a) $f(t) = 3\sin(3t) - 4\cos(3t)$
$C = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$
$3t_0 = \pi + \tan^{-1}(\frac{3}{-4}) \simeq \pi - 0,64 \simeq 2,5$, dermed: $t_0 \simeq 0.83$.
$f(t) \simeq 5\sin(3(t - 0.83))$.

b) $f(t) = -2\sqrt{3}\sin(4t) + \sqrt{3}\cos(4t)$

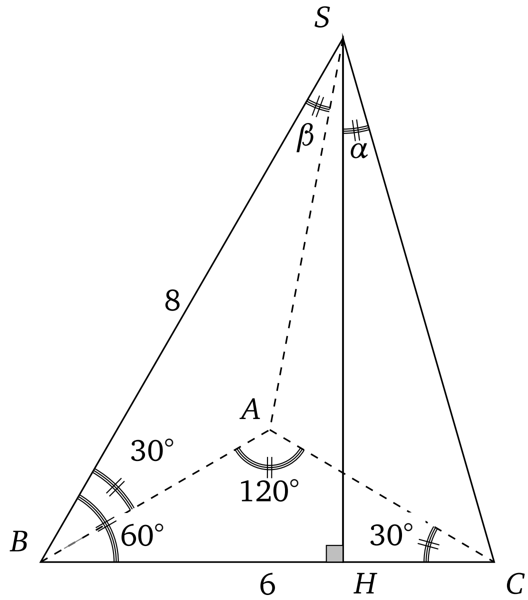
$C = \sqrt{(-2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{15}$
$4t_0 = 2\pi + \tan^{-1}(\frac{-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}) \simeq 2\pi - 1,1 \simeq 5.18$, dermed: $t_0 \simeq 1.29$.
$f(t) \simeq \sqrt{15}\sin(4(t - 1.29))$.

c) $f(t) = -3\sin(5t) - 4\cos(5t)$

$C = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$
$5t_0 = \pi + \tan^{-1}(\frac{3}{4}) \simeq \pi + 0.64 \simeq 3.79$, dermed: $t_0 \simeq 0.76$
$f(t) \simeq 5\sin(5(t - 0.76))$.

Oppgave 7

Bruk $\cos B = \dfrac{BH}{SB}$ til å bestemme $BH = 4$ og deretter du kan finne SH og du har HC og du kan finne α: $\alpha = \tan^{-1}(\dfrac{\sqrt{3}}{6}) \simeq 16.1°$. Du kan bestemme AB i den likebeinte trekanten BAC , og deretter du kan bestemme SA i trekanten SBA ved hjelp av cosinussetningen og sinussetningen gir: $\beta = \tan^{-1}(\dfrac{\sqrt{3}}{5}) \simeq 19.1°$.



Oppgave 8

a) Periode $= 24$, Amplitude $= 6$, gjennomsnittstemperaturen $= 18$

b) Den laveste temperatur er $T_{min} = 18 - 6 = 12$ for:
$\sin(\dfrac{\pi}{12}t) = 1$ som gir:
$\dfrac{\pi}{12}t = \dfrac{\pi}{2}$, dermed $t = 6$ (kl. 6:00).
Den høyeste temperaturen er $T_{maks} = 18 + 6 = 24$ for:
$\sin(\dfrac{\pi}{12}t) = -1$ som gir $\dfrac{\pi}{12}t = \dfrac{3\pi}{2}$, dermed $t = 18$ (kl. 18:00).

c) $18 - 6\sin(\dfrac{\pi}{12}t) = 21$, dermed $\sin(\dfrac{\pi}{12}t) = -\dfrac{1}{2}$ som gir:
$\dfrac{\pi}{12}t = \pi + \dfrac{\pi}{6}$, det vil si: $t = 14$
$\dfrac{\pi}{12}t = 2\pi - \dfrac{\pi}{6}$, det vil si: $t = 22$

Kontrolloppgaver - Kapittel 4

Oppgave 1

a) Hva vil det si at grensverdien til $f(x)$ er L når x går mot a: $\lim_{x\to a} f(x) = L$?

b) Ta et eksempel der en oppdelt funksjon har ingen grenseverdi i et bestemt punkt.

c) Ta et eksempel der en oppdelt funksjon har grenseverdi men er ikke kontinuerlig i et bestemt punkt.

Oppgave 2

Bestem grenseverdiene:

a) $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4}$ b) $\lim_{x\to a} \dfrac{x^2-a}{x-a}$ c) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}}$ d) $\lim_{x\to b} \dfrac{x^2-bx}{\sqrt{x}-\sqrt{b}}$

Oppgave 3

Gitt $\lim_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$ og $\lim_{u\to 0} \dfrac{\tan u}{u} = 1$. Bestem grenseverdiene:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x}$ b) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sin 3(x-1)}{x-1}$ c) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{2x}$ d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan bx}{cx}$ $(c \neq 0)$

Oppgave 4

Bestem grenseverdiene:

a) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2+4}$ b) $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x-1}$ c) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+x-1}{x^4+x^2-5}$ d) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}-\pi}{2\sqrt{x}+1}$

Oppgave 5

Betrakt følgende funksjoner:

i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{x+1} & \text{hvis } x \neq 0 \\ 1 & \text{hvis } x = 0 \end{cases}$ ii) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{hvis } x \neq 1, \\ 3 & \text{hvis } x = 1 \end{cases}$

Undersøk om f og g er kontinuerlige i $x = 0$ og i $x = 1$ henholdsvis.

Oppgave 6

i) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{hvis } -2 < x \leq 1 \\ x-2 & \text{hvis } x > 1 \end{cases}$ ii) $g(x) = \begin{cases} x & \text{hvis } -1 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{hvis } 2 < x < 3 \\ -x+5 & \text{hvis } 3 < x < 4 \end{cases}$

a) Undersøk om f er kontinuerlig i $x = 1$ og g i $x = 3$.

b) Tegn grafene til f og g der funksjon er definert. Er f og g kontinuerlige i alle punkt i sin definisjonsmengde?

Oppgave 7

a) Bestem summene:

i) $b + 1 + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{b^2} + \cdots$ når $b > 1$.

ii) $x + \sqrt{x} + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \cdots$ når $x > 1$.

iii) $\dfrac{15}{10^2} + \dfrac{15}{10^4} + \dfrac{15}{10^6} + \cdots$

iv) Bruk iii) til å skrive $2,151515...$ som et rasjonalt tall ($\dfrac{p}{q}$, $q \neq 0$).

b) Vi skal bestemme hvor stor initialdosen i et behandlingsopplegg mot allergi er. Opplysningene som er gitt er at det skal gies totalt 30 injeksjoner, totalmengden som tilføres pasienten er 1600 ml og injeksjonene skal økes med 1/4 fra injeksjon til injeksjon.

Fasit - Kontrolloppgaver - Kapittel 4

Oppgave 1

a) Grenseverdien til en funksjon er den verdien funksjonsuttrykket går mot når den variable går mot en spesiell verdi. Her vi det si at $f(x)$ nærmer seg mer og mer mot L (grenseverdi) når x går nærmere og nærmere mot a.

b) Ta et eksempel der en oppdelt funksjon har ingen grenseverdi i et bestemt punkt.
$f(x) = \begin{cases} x & \text{hvis } x \leq 1 \\ x+1 & \text{hvis } x > 1 \end{cases}$
Ingen grenseverdi i $x = 1$
$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2.$

c) Ta et eksempel der en oppdelt funksjon har grenseverdi men er ikke kontinuerlig i et bestemt punkt.
$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{hvis } x < 2 \\ x^2 & \text{hvis } x > 2 \end{cases}$: Grenseverdien er 4 men ingen funksjonsverdi i $x = 2$.

Oppgave 2

a) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{x^2-16}{x-4} = 8$ b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-a}{x-a} = 2a$

c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x-5}{\sqrt{x}-\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$ d) $\lim\limits_{x\to b} \dfrac{x^2-bx}{\sqrt{x}-\sqrt{b}} = 2b\sqrt{b}$

Oppgave 3 $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin u}{u} = 1$ og $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\tan u}{u} = 1$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{2x} = 0,5$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin 3(x-1)}{x-1} = 3$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{2x} = 2,5$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan bx}{cx} = b/c \quad (c \neq 0)$

Oppgave 4 (del telleren og nevneren med største potensledd i tellern og nevneren)

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{3x^2+4} = \dfrac{1}{3}$ b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x-1} = -\infty$ (ingen grenseverdi)

c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+x-1}{x^4+x^2-5} = 0$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}-\pi}{2\sqrt{x}+1} = 0,5$

Oppgave 5

i) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{x+1} & \text{hvis } x \neq 0, \\ 1 & \text{hvis } x = 0, \end{cases}$ ii) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{hvis } x \neq 1, \\ 3 & \text{hvis } x = 1 \end{cases}$

f er kontinuerlig i $x = 0$ og og g i $x = 1$, da begge funksjonene er definert i disse punktene og har grenseverdi lik funksjonsverdien

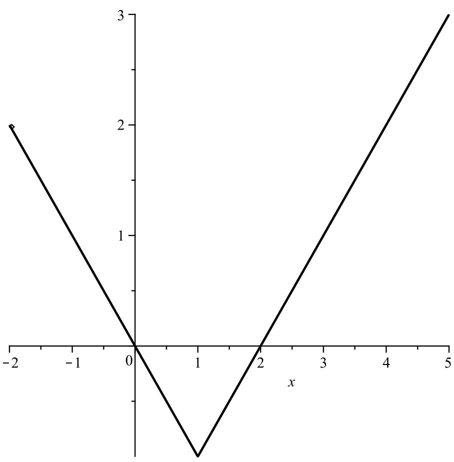
$\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x+1} = 1$ $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \dfrac{0}{0} = \lim_{x\to 1} x^2 + x + 1 = 3$ (polynom divisjon)

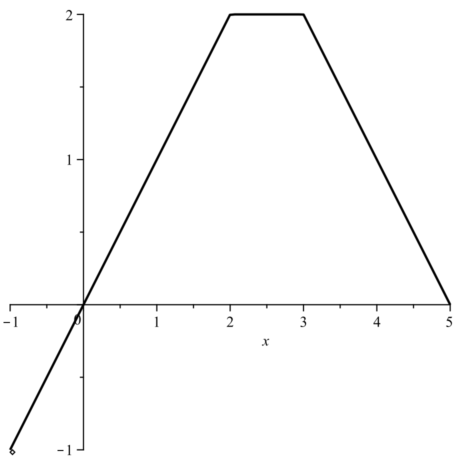
Oppgave 6

i) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{hvis } -2 \leq x \leq 1, \\ x-2 & \text{hvis } x > 1, \end{cases}$ ii) $g(x) = \begin{cases} x & \text{hvis } -1 \leq x \leq 2, \\ 2 & \text{hvis } 2 < x \leq 3, \\ -x+5 & \text{hvis } 3 < x \leq 5, \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = -1$: dermed f er kontinuerlig i $x = 1$.
$\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^+} g(x) = g(3) = 2$: dermed g er kontinuerlig i $x = 3$.

b) Grafene er tegnet her:





Begge er kontinuerlige i hele sin definisjonsmengde unntatt:
$x = -2$ (f er ikke kontinuerlig fordi f er ikke definert der)
($x = 4$ er ikke i definisjonsmengden til g og vi trenger å studere kontinuitet der)

Oppgave 7

a) **i)** $b+1+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{b^2}+\cdots=\lim\limits_{n\to\infty} a\dfrac{1-k^n}{1-k}=\lim\limits_{n\to\infty} b\dfrac{1-(1/b)^n}{1-(1/b)}$

$=\dfrac{b}{1-1/b}=\dfrac{b^2}{b-1}$ når $b>1$.

Ellers vi kunne godt benytte formelen $\dfrac{a}{1-k}$ som kan brukes når $|k|<1$.

ii) $x+\sqrt{x}+1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\cdots \quad =\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{1-k}=\dfrac{x}{1-(1/\sqrt{x})}=\dfrac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$.

(Bemerk $k=\dfrac{1}{\sqrt{x}}<1$, når $x>1$) .

iii) $\dfrac{15}{10^2}+\dfrac{15}{10^4}+\dfrac{15}{10^6}+\cdots=\dfrac{0,15}{1-0,01}=\dfrac{15}{99}$

b) $a+1,25a+1,25a^2+\cdots+1,25a^{29}=1600$

$a\dfrac{1,25^{30}-1}{1,25-1}=1600$. Dermed $a=1600\dfrac{1,25-1}{1,25^{30}-1}\simeq 0{,}496$ ml.

Kontrolloppgaver - Kapittel 5

Oppgave 1

a) Forklar hva proporsjonalitet og omvendt proporsjonalitet handler om.

b) Si kort hva lineær og eksponentiell vekst betyr.

c) Hvilken av følgende funksjoner stiger raskere når $x > 3$?
i) $y = 3x$ ii) $y = x^3$ iii) $y = 3^x$

Oppgave 2

a) En verdi y vokser eksponentielt pr. år og er fordoblet i løpet av 5 år.
Sett opp en funkson som angir verdien y ved tidspunktet t (målt i år).
Bestem hvor mange prosent verdien har steget i løpet av 3 år.
Regn ut hvor lenge det tar før verdien er firedoblet.

b) En verdi v synker eksponentielt med 1,5 % pr. mnd.
Sett opp en funkson som angir verdien v ved tidspunktet t (målt i mnd).

Oppgave 3

Skrive så enkelt som mulig:

a) $\dfrac{(e^{2x})^3 \cdot (e^{-x})^2}{e^{3x}}$ b) $\dfrac{(e^{-x}+e^x)^2 - (e^{-x}-e^x)^2}{2}$

c) $\ln x^4 + 2\ln x + \ln \dfrac{4}{x^6} - 2\ln 2$ d) $2\ln(x+1) + \ln(x-1)^2 - 2\ln(x^2-1)$

Oppgave 4

Løs ligningene :

a) $5e^{2x+1} = 1$ b) $e^{3x+1} = e^x$

c) $e^{2x} = 5e^x - 6$ d) $e^{-x} = 3e^x - 2$

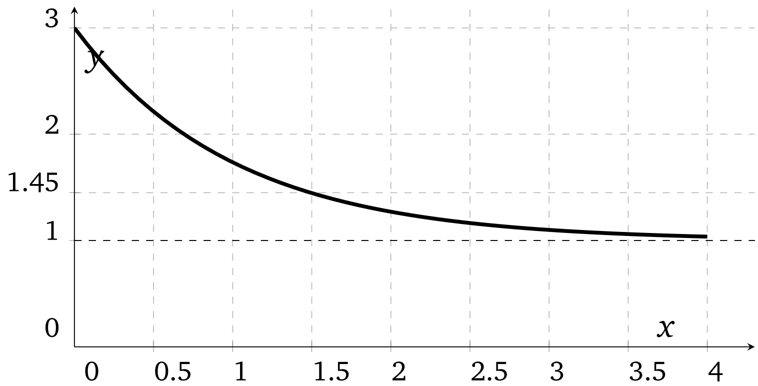
e) $2\ln x = \ln(2x-1)$ f) $3\ln(x^2) - \ln(x^3) = 5$

Oppgave 5

Tegn grafene to og to i samme koordinatsystem:

a) $y = 3e^x$ og $y = 3e^{-x}$
b) $y = -3e^x$ og $y = -3e^{-x}$
c) $y = 4 - 3e^x$ og $y = 4 - 3e^{-x}$
d) $y = 3 - 4e^x$ og $y = 3 - 4e^{-x}$

Oppgave 6
Grafen til en ekponential funksjon på formen: $y = c + ae^{kx}$ er tegnet her.
Angi c, a og regn en tilnærmet verdi for k.



Oppgave 7
Tegn grafen til følgende funksjoner:

a) $f(x) = \dfrac{3}{1+2e^{-x}}$ **b)** $f(x) = \dfrac{3}{1+2e^{x}}$

Hint: La $f(x) = \dfrac{B}{a+ce^{kx}}$ der $B > 0$, $a > 0$ og $c > 0$.
Det er ikke vanskelig å tegne grafen til f hvis man forstår litt bedre funksjonsuttrykket: La først $k < 0$: Vi får da $f(0) = \dfrac{B}{a+c}$ og $\lim_{x\to\infty} f(x) = \dfrac{B}{a}$ (horisontal asymptote).
Det er naturlig da at funksjonen stiger fra skjæringspunkt med y-aksen), $f(0)$ mot asymptoten $y = \dfrac{B}{a}$: $f(0) = \dfrac{B}{a+c} < \dfrac{B}{a}$.
Man kunne også forklare dette med å si at for $k < 0$ nevneren synker og dermed funksjonen stiger. Det kan forklares på en tilsvarende måte at f synker når $k > 0$.

Fasit - Kontrolloppgaver - Kapittel 5

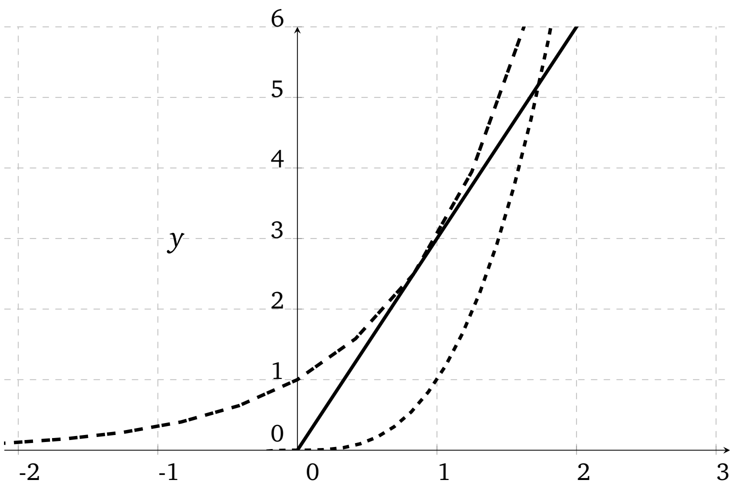
Oppgave 1

a) *Proporsjonalitet* i matematikk handler om en sterk sammenheng mellom to størrelser som varierer. To størrelser x og y er proporsjonale($y \propto x$) dersom en dobling av den ene størrelsen fører til en dobling av den andre størrelsen, slik at $y = kx$, der k er konstant og kalles *proporsjonalitetsfaktoren* eller *proporsjonalitetskoeffisienten*.

To størrelser x og y er *omvendt proporsjonale*($y \propto \frac{1}{x}$) dersom den ene variablen er proporsjonal med den inverse av den andre, eller sagt på en annen måte: produktet av variablene er konstant, slik at $y = \frac{k}{x}$(dvs. $xy = k$), der k er konstant og $k \neq 0$.

b) Ved lineær endring skal y-verdien stige eller synke med samme lengde pr lengdeenhet, og grafen kan da beskrives ved en rett linje
Ved eksponentiell endring vil y-verdiene stige eller synke med samme prosent pr lengdeenhet, og man får en buet kurve.

c) $y = 3^x$stiger raskere enn $y = x^3$ og $y = 3x$ når $x > 3$?



Oppgave 2

a) $y(t) = C \cdot a^{\frac{t}{T}}$, dermed: $y(t) = C \cdot 2^{\frac{t}{5}}$

Verdien har da steget med $\frac{y(3) - y(0)}{y(0)} = \frac{C2^{\frac{3}{5}} - C}{C} = 2^{\frac{3}{5}} - 1 \simeq 0,516(ca.51,6\%)$.

$y(t) = C \cdot 2^{\frac{t}{5}} = 4C$ dermed: $2^{\frac{t}{5}} = 4$ som medfører: $t = 10$ år

b) En verdi v synker eksponentielt med 1,5 % pr. mnd.
Sett opp en funkson som angir verdien v ved tidspunktet t (målt i mnd).
$v(t) = C \cdot a^{\frac{t}{T}} = C \cdot 0,985^t$

Oppgave 3

a) $\dfrac{(e^{2x})^3 \cdot (e^{-x})^2}{e^{3x}} = e^{6x-2x-3x} = e^x$

b) $\dfrac{(e^{-x}+e^x)^2 - (e^{-x}-e^x)^2}{2} = \dfrac{(e^{-2x}+e^{2x}+2)-(e^{-2x}+e^{2x}-2)}{2} = 2$

c) $\ln x^4 + 2\ln x + \ln\dfrac{4}{x^6} - 2\ln 2 = 4\ln x + 2\ln x + \ln 4 - 6\ln x - 2\ln 2 = 0$

d) $2\ln(x+1) + \ln(x-1)^2 - 2\ln(x^2-1) = 2\ln(x+1)(x-1) - 2\ln(x^2-1) = 0$

Oppgave 4

a) $x = 0,5(\ln(0,2)-1)$ b) $x = -0,5$

c) $x = \ln 2 \vee x = \ln 3$ d) $x = 0$

Gang begge sider med e^x : $3e^{2x} - 2^x - 1 = 0$
Løs andregradsligningen : $e^x = 1 \vee e^x = -1/3$
$x = 0$ ($e^x = -1/3$ er umulig å løse)

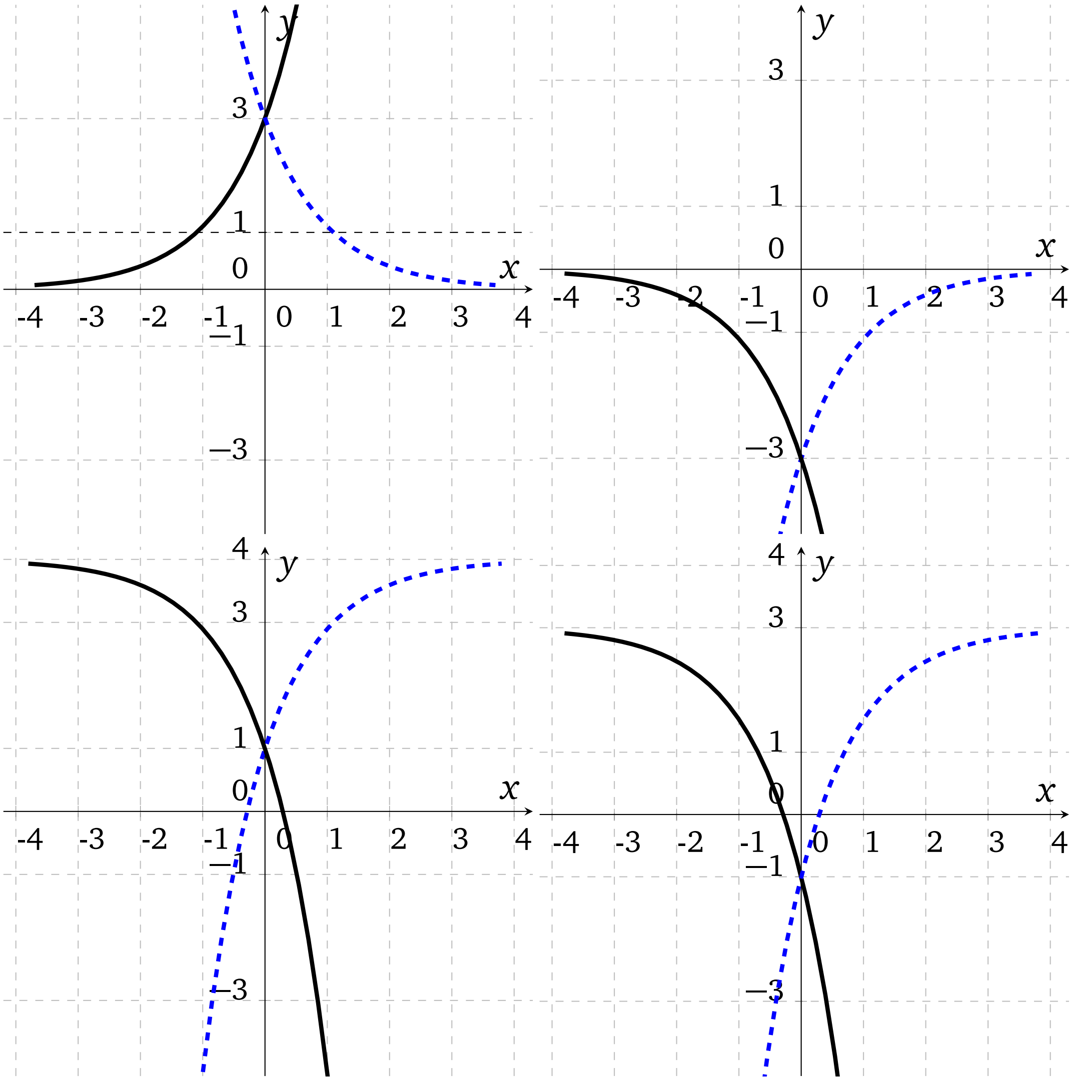
e) $x = 1$
$x^2 - 2x + 1 = 0$

f) $x = e^{5/3}$
$3\ln x = 5$

Oppgave 5

Grafen til funksjoner med *negative eksponenter* er tegnet *stiplede*.

a) $y = 3e^x$ og $y = 3e^{-x}$
b) $y = -3e^x$ og $y = -3e^{-x}$
c) $y = 4 - 3e^x$ og $y = 4 - 3e^{-x}$
c) $y = 3 - 4e^x$ og $y = 3 - 4e^{-x}$



Oppgave 6

$y = 1 + 2e^{kx}$, der $k \simeq -1$

(du kan velge punktet (1 , 1.75) eller (2, 1.25) eller som vist på grafen (1.5 , 1,45) å regne en tilnærmet verdi for $k \simeq -0.99$.

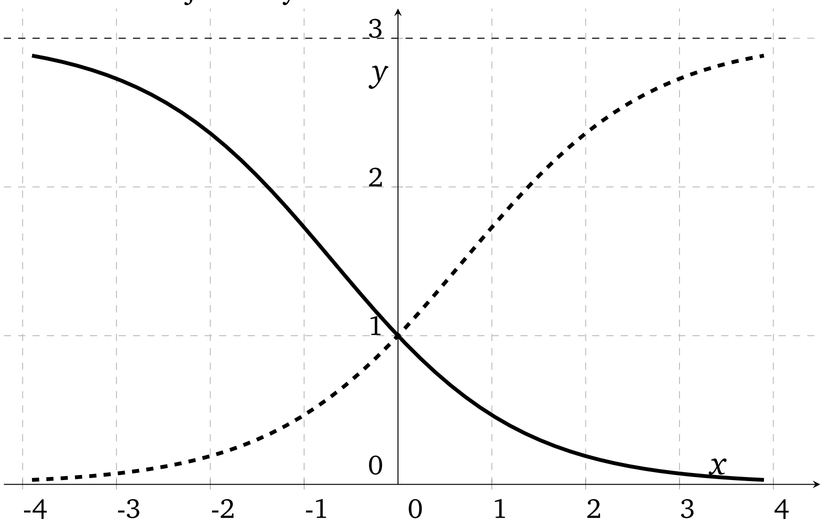
Oppgave 7

a) $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2e^{-x}}$

b) $f(x) = \dfrac{3}{1 + 2e^{x}}$

Bemek at begge har skjæringspunkt med y-aksen i $f(0) = 1$:

I del a) er nevneren synkende (negativ eksponent og positiv koeffisient(2)) dermed funksjonen stiger.
I del b) er nevneren stigende (positiv eksponent og og positiv koeffisient(2)) dermed funksjonen synker.



Kontrolloppgaver - Kapittel 6

Oppgave 1

a) Si kort hva deriverte til en funksjon forteller oss. Hva handler deriverbarhet om?

b) Er $f(x) = \dfrac{1}{x}$ deriverbar for alle reelle x-verdier?
Bestem deriverte til f i sin definisjonsmengde.

c) Tegn grafen til $g(x) = |x|$. Forklar hvorfor g er ikke deriverbar i origo.

Oppgave 2

Løs oppgavene I og II, og kryss av det alternativet (a, b eller c) som passer best.

I En funksjon er ikke deriverbar der:

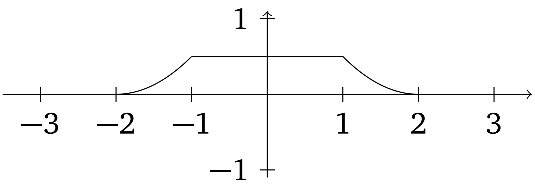
- a funksjonen ikke er kontinuerlig(funksjon ikke har tangent).
- b funksjonen er kontinuerlig men har flere enn en tangent.
- c enten funksjonen har ingen tangenter(ikke er kontinuerlig) eller har flere enn en tangentlinje.

II $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ har knekkpunkt i origo fordi:

- a funksjonen ikke er kontinuerlig i origo.
- b funksjonen har ikke tangent i origo.
- c Den deriverte er ikke definert i origo og har to tangenter.

Oppgave 3

Figuren viser grafen til en funksjon f, og vi ser at grafen har to *knekkpunkt*.



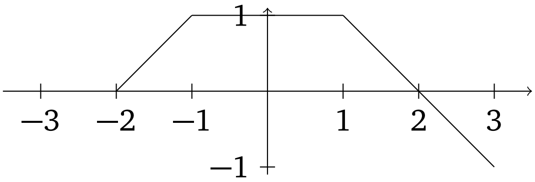
a) Hva mener vi med knekkpunkt på en graf?

b) Tegn også grafen til f' i det samme intervallet som denne grafen.

c) Er funksjonen deriverbar i knekkpunktene? Forklar.

Oppgave 4

Figuren viser grafen til $f'(x)$, deriverte til en funksjon f:



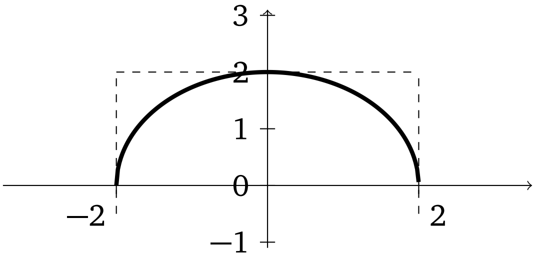
a) Angi eventuelle knekkpunkt til f.

b) Tegn også grafen til f i det samme intervallet som denne figuren.

c) Tegn grafen til f''.

Oppgave 5

a) Grafen til en funksjon $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ er vist på figuren:



Tangentene i $(-2, 0)$ og $(2, 0)$ er vertikale, og i $(0, 2)$ horisontal. Angi $f'(0)$. Lag en skisse av grafen til f'.

b) La $f(x) = e^{-x^2}$. Regn ut $f'(x)$, og spesielt $f'(0)$. Bruk så definisjonen av $f'(0)$ til å regne ut

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x}.$$

Oppgave 6

i) Bestem $y' = \dfrac{dy}{dx}$ når:

a) $y = \sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$ b) $y = 2e^x + 5x^e$

c) $y = 3\sin(2x) + \tan(2x)$ d) $y = \sqrt{\sin x + \cos x}$

e) $y = \ln(\sin 2x + \cos 2x)$ f) $y = \ln(2x) - \ln x^2$

g) $y = x^2 \ln x$ h) $y = e^{2x}\cos(2x)$

i) $y = \dfrac{\ln 2x}{x}$ j) $y = \dfrac{e^{3x}}{\sin 3x + \cos 3x}$

ii) Bestem $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ når: $x^3 + y^2 = e^y$.

Oppgave 7

a) Bestem $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ når: i) $y = \cos^3(5x)$ ii) $y = e^{\sin 2x}$

b) Bestem tangenten til $y = \sin x$ i $x = 0$.
Lineariser $y = \sin x$ i origo. Hva vil dette si?

c) Berstem $F_2(x)$ (taylorpolynom av andre grad) til $f(x) = 3e^{2x} + 2\sin 3x$ i $x = 0$.

Oppgave 8

Bestem grenseverdiene:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{e^{\sin x} - 1}{x - \pi}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(2x - 1)}{x - 1}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\sin a(x - a)}{x - a}$

Oppgave 9

a) Bestem $F_2(x)$, Taylor-polynom av andre grad til $f(x)$ i $x = 0$:

i) $f(x) = e^{-2x} + \cos 3x$ ii) $f(x) = \ln(\cos x)$

b) Lineariser $g(x) = \sqrt{x}$ om $x = 1$.
Bruk dette til å bestemme en tilnærmert verdi for $\sqrt{1,1}$.

Oppgave 10

Anta at en kule vokser uten å forandre form. Radien til kule vokser med en hastighet på 0,02cm/min.

a) Bestem hvor rask volumet til kulen endrer seg når radien til kulen er blitt 25cm.

b) Bestem hvor rask overflaten til kulen endrer seg når radien til kulen er blitt 25cm.

Oppgave 11

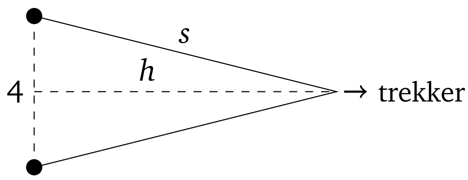
Anta at en h =1,5m gutt er x meter unna en L=5m en lyktestolpe. Hans skyggelengde er H. Vi kommer til å vurdere to problemer:

i) Han går mot stolpen med en farten 1m/s.
ii) Han går fra stolpen med en farten 1m/s.

a) Vis at $H = \dfrac{h}{L - h}x$. Finn hvor rask lengden til hans skyggen endrer seg i del i) og ii).

b) Forklar at toppen av hans skygge har posisjon $x_1 = x + H$. Finn farten som toppen til hans skygge beveger i del i) og ii).

Oppgave 12
En partikkel beveger seg med en konstant horisontal hastighet 2 m/s langs kurven til $y = x^2 + 1$. Bestem partikkelens vertikal hastighet etter 3 sekunder.
Oppgave 13
Vi har en sprettert og drar i strikken slik at vi får en likesidet trekant med en fast grunnlinje, $a = 4$, og en høyde h som øker, se figur. Sammenhengen mellom høyde h og sidekant s er $s = \sqrt{h^2 + 4}$.



La $\phi(t)$ være funksjonen som har høyden (i cm) som funksjonsverdi ($h = \phi(t)$) når
argumentet er tiden t (i sekunder). Ved en gitt tid t_0 vet vi at $\phi'(t_0) = 2$.

a) Hvor fort øker høyden ved denne tiden?

b) Vi lar så $f(t)$ være lengden av sidekanten ved tiden t. Da kan vi skrive f som en sammensatt funksjon med ϕ som indre funksjon, altså $f(t) = F(\phi(t))$. Angi den ytre funksjonen F.

c) Deriver f og finn hvor fort sidekanten endres ved tiden t_0 når du får oppgitt at $\phi(t_0) = 20$.

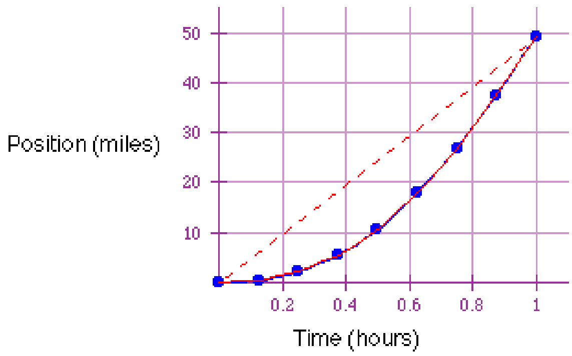
Oppgave 14
Anta at en kule vokser uten å forandre form. Radien til kule vokser med en hastighet på 0,2cm/min.

a) Bestem hvor rask volumet til kulen endrer seg når radien til kulen er blitt 50cm.

b) Bestem hvor rask overflaten til kulen endrer seg når radien til kulen er blitt 50cm.

Oppgave 15

Figuren viser posisjonen til en bil i $0 \leq t \leq 1$ timer. Det kans leses av grafen:
a) Bestem gjennomsnittlig fart i intervallet $,25 \leq t \leq 0,5$.

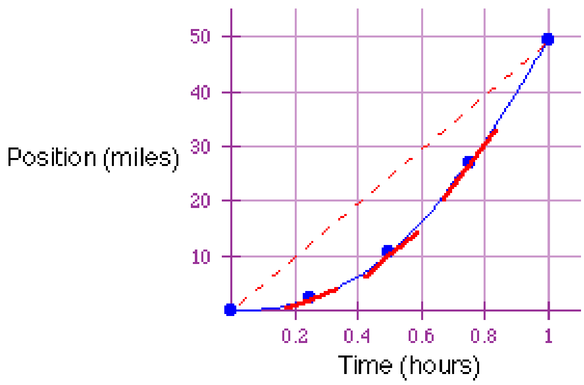


Tid, t	Posisjon,x
(hours)	(miles)
0.00	0.0
0.25	2.3
0.50	10.6
0.75	26.8
1.00	49.2

b) Anta at vi leser av grafen:

Tid, t	Posisjon,x
0.25	2,300
0.26	2,512

Beregn momentan hastighet i t = 0,25 .



Tid, t	Momentan hastighet
(hours)	(mph)
0.25	21.2
0.50	49.0
0.75	77.2

c) Forklar med dine ord sammenhengen mellom grafen og de gitte verdiene.

Oppgave 16

Gitt funksjonen $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

a) Bestem evenutelle nullpunkt og skjæringspunkt med y-aksen.

b) Regn eventuelle ekstremalpunkt. Finn funksjonens eventuelle asymptoter. Tegn grafen.

Oppgave 17

Tegn grafen til en funksjon $f(x)$ når vi vet:

$$f(-x) = f(x), \quad f(0) = -1, \quad f(1) = 0 \text{ og } \quad f(+\infty) = 1.$$

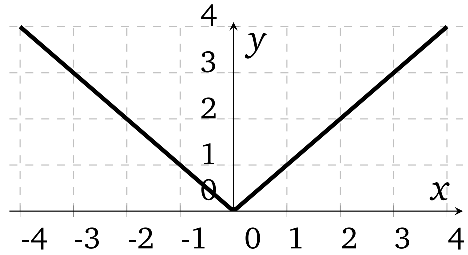
Fasit - Kontrolloppgaver - Kapittel 6

Oppgave 1

a) Den deriverte til en funksjon kan fortelle om hvor rask funksjonen endrer seg med hensyn til funksjonens variabel.

b) Nei. Ikke deriverbar i $x = 0$. $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ når $x \neq 0$.

c) Funksjon er ikke deriverbar der den har knekkpunkt $(x = 0)$:

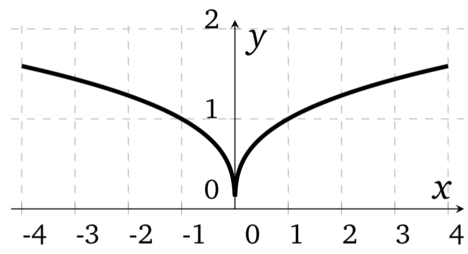


g er ikke deriverbar da funksjonen har to ulike stigningstall i $x = 0$:
$|x| = x$ når $x \geq 0$ og $|x| = -x$ når $x < 0$. Ellers vi kan skrive:
$g(x) = |x| = \sqrt{x^2}$, og dermed: $g'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \dfrac{x}{|x|}$, $x \neq 0$.

Oppgave 2

I c) er korrekt: En funksjon er ikke deriverbar der: enten funksjonen har ingen tangenter(ikke er kontinuerlig, se oppgave 1b) eller har flere enn en tangentlinje(se oppgave 1c).

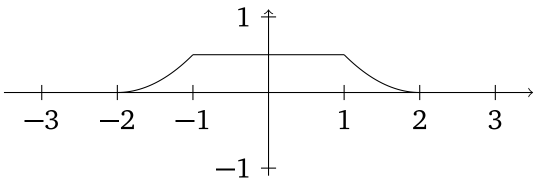
II c) er korrekt. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ har knekkpunkt i origo fordi: den deriverte er ikke definert i origo: $f'(x) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.
Grafen til $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ er tegnet her. Som vi ser i origo kan man tegne to ulike tangenter.

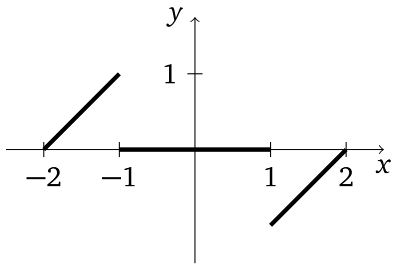


Oppgave 3

a Et *knekkpunkt* betyr at grafen har to ulike tangenter i det punktet, en fra venstre og en fra høyre. Grafen er ikke «glatt».
En funksjon er deriverbar dersom den er glatt, det vil si den den har kun en tangent i punktet.

b Grafen til f (til venstre) grafen til f' (til høyre).



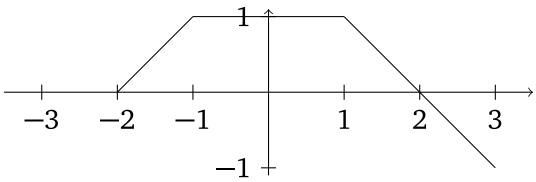


c Nei, Det er den deriverte som har to ulike grenseverdier (2 ulike tangenter) i knekkpunkten. Se grafen til f'.

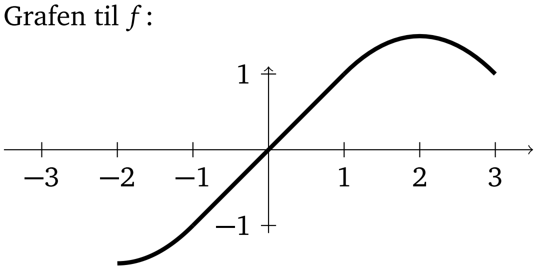
Oppgave 4

a f' er kontinuerlig og dermed f er deriverbar og har ingen knekkepunkt.

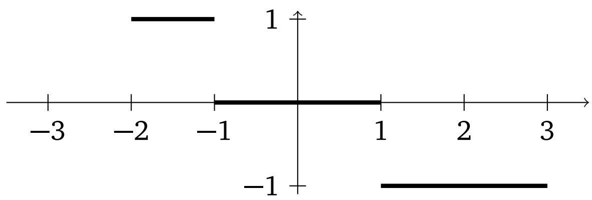
b Figuren viser grafen til $f'(x)$, deriverte til en funksjon f:



Grafen til f:

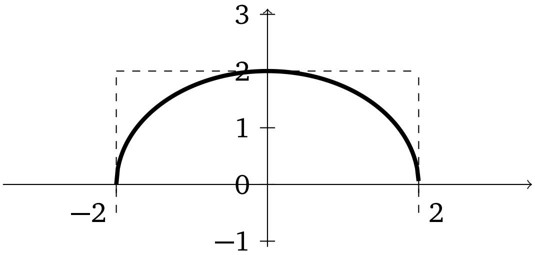


c) Grafen til f'':

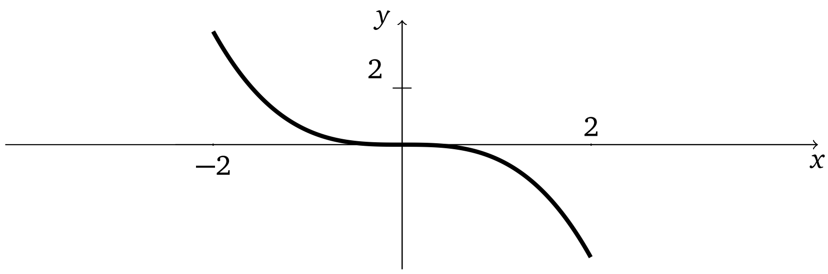


Legg merke til at vi kan flytte grafen til f opp eller ned ved å legge til en vilkårlig konstant da vi kun vet den deriverte.

Oppgave 5 Grafen til en funksjon $f : [-2,2] \to \mathbb{R}$ er vist på figuren:



a) Da grafen til f har horisontal tangent i punktet $(0,2)$ betyr det at $f'(0) = 0$. I punktene $(-2,0)$ og $(2,0)$ er tangenten *vertikal*, det vil si «uendelig stor (positiv eller negativ) derivert». Det betyr at den deriverte starter som «uendelig stor» i $x = -2$, går nedover til 0 i $x = 0$ og fortsetter nedover mot «uendelig stor (negativ)» i $x = 2$.



$f'(0) = 0$

b) Ved kjerneregelen får vi $f'(x) = -2x \cdot e^{-x^2}$, og spesielt $f'(0) = 0$.

Definisjonen av derivert sier oss at

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

som innsatt $x = 0$ gir oss

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-\Delta x^2} - 1}{\Delta x}$$

Nå kan vi uten videre bytte Δx ut med x, og vi får

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x}$$

som vi vet må bli lik 0 (dette vet vi fra å ha regnet ut $f'(0)$). Vi har altså regnet ut

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-x^2} - 1}{x} = 0.$$

Oppgave 6

i)

a) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x}}$ b) $y' = 2e^x + 5ex^{e-1}$

c) $y' = 6\cos(2x) + \dfrac{2}{\cos^2(2x)}$ d) $y' = \dfrac{\cos x - \sin x}{2\sqrt{\sin x + \cos x}}$

e) $y = \dfrac{2(\cos 2x - \sin 2x)}{\sin 2x + \cos 2x}$ f) $y = -\dfrac{1}{x}$

g) $y = x(2\ln x + 1)$ h) $y = 2e^{2x}(\cos(2x) - \sin(2x))$

i) $y = \dfrac{1 - \ln 2x}{x^2}$ j) $y = \dfrac{6e^{3x}\sin 3x}{(\sin 3x + \cos 3x)^2}$

ii) $y' = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ når: $x^3 + y^2 = e^y$
Deriverer begge sider med hensyn til x: $3x^2 + 2yy' = y'e^y$,
dermed: $y' = \dfrac{3x^2}{e^y - 2y}$

Oppgave 7

a) i) $y' = -15\cos^2(5x)\sin(5x)$ ii) $y' = 2\cos(2x)e^{\sin 2x}$

b) $y = f(0) + f'(0)(x-0) = \sin 0 + \cos 0 \cdot x = x$, dermed tangenten er $y = x$ i $x = 0$.
Lineariseringen i origo der $x = 0$: $L(x) = F_1(x) = x$.
Det vil si:

$$\sin x \simeq x$$

om $x = 0$ (når x er liten nok, målt i radianer).
For eksempel $\sin(0,2) \simeq 0,2$.

c) $F_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 = 3 + 12x + 6x^2$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 3e^{2x} + 2\sin 3x & f(0) &= 3 \\ f'(x) &= 6e^{2x} + 6\cos 3x & f'(0) &= 12. \\ f''(x) &= 12e^{2x} - 18\sin 3x & f''(0) &= 12. \end{aligned}$$

Oppgave 8

a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{x - \pi} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos x e^{\sin x}}{1} = -1$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x-1)}{x-1} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2/(2x-1)}{1} = 2$

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin a(x-a)}{x-a} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{a\cos a(x-a)}{1} = a$

Oppgave 9

a) $F_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$ der $x_0 = 0$:

i) $f(x) = e^{-2x} + \cos 3x, \qquad F_2(x) = 2 - 2x - 2,5x^2$

ii) $f(x) = \ln(\cos x), \qquad F_2(x) = -0,5x^2$

b) Lineariser $g(x) = \sqrt{x}$ om $x = 1$.
Bruk dette til å bestemme en tilnærmert verdi for $\sqrt{1,1}$.
$L(x) = f(1) + f'(1)(x-1) = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(x-1) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) = \frac{1}{2}(x+1)$
$L(x) = \frac{1}{2}(x+1)$
Det vil si: $g(x) \simeq L(x)$ når x er nær nok. Dermed:
$g(1,1) = \sqrt{1,1} \simeq \frac{1}{2}(1,1+1) = 1,05$

Oppgave 10

a) $V = \frac{4\pi}{3}r^3$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\frac{dr}{dt} = 4\pi r^2\frac{dr}{dt} = 4\pi(25)^2 \cdot 0,02 \simeq 157,1\text{cm}^3/\text{s}$$

b) $S = 4\pi r^2$

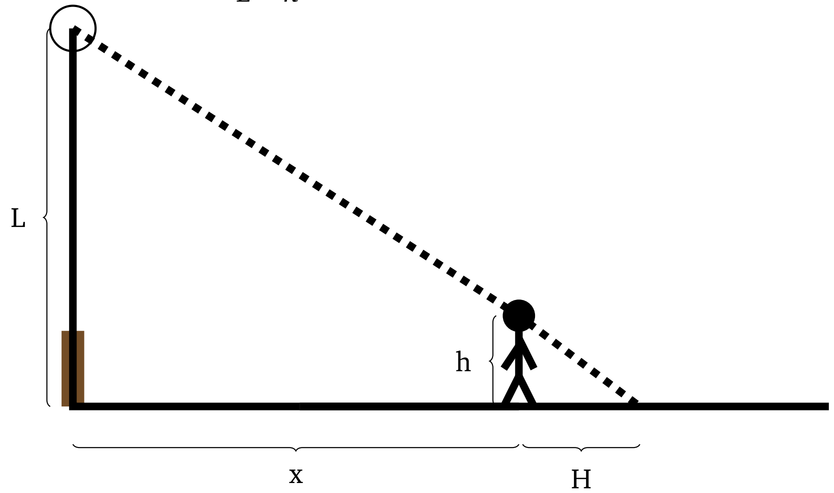
$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{dr}\frac{dr}{dt} = 8\pi r\frac{dr}{dt} = 8\pi(25) \cdot 0,02 \simeq 12,6\text{cm}^2/\text{s}$$

Oppgave 11

Anta at en h =1,5m gutt er x meter unna en L=5m en lyktestolpe. Hans skyggelengde er H. Vi kommer til å vurdere to problemer:

i) Han går mot stolpen med en farten 1m/s.
ii) Han går fra stolpen med en farten 1m/s.

a) Vi skal vise at $H = \frac{h}{L-h}x$:



Bruk forholdet mellom sidelengdene til to formlike trekanter $\frac{L}{x+H} = \frac{h}{H}$, og vi får da: $H = \frac{h}{L-h}x$.
(ved å innsette verdiene får vi: $H = \frac{3}{7}x$)
i) $\frac{dH}{dt} = -\frac{3}{7}$ m/s (Lengden på skyggen synker)
ii) $\frac{dH}{dt} = \frac{3}{7}$ m/s (Lengden på skyggen øker)

b) Av denne figuren ser vi at toppen av hans skygge har posisjon $x_1 = x + H$.
i) $\frac{dx_1}{dt} = -\frac{10}{7}$ m/s (avstanden fra stolpen til toppen av skyggen synker)
ii) $\frac{dx_1}{dt} = \frac{10}{7}$ m/s (avstanden fra stolpen til toppen av skyggen øker).

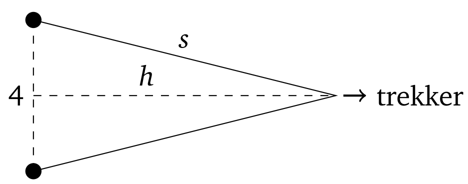
Oppgave 12

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x \cdot \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2 \cdot 6 \cdot 2 = 24 \text{ m/s}$$

Bermek at $x = 2m/s \cdot 3s = 6m$.

Oppgave 13

Vi har en sprettert og drar i strikken slik at vi får en likesidet trekant med en fast grunnlinje, $a = 4$, og en høyde h som øker, se figur. Sammenhengen mellom høyde h og sidekant s er $s = \sqrt{h^2 + 4}$.



La $\phi(t)$ være funksjonen som har høyden (i cm) som funksjonsverdi når argumentet er tiden t (i sekunder). Ved en gitt tid t_0 vet vi at $\phi'(t_0) = 2$.

Sammenhengen mellom høyde h og sidekant s er $s = \sqrt{h^2+4}$: $F(t) = \sqrt{(\phi(t))^2 + 4}$

a) Farten er da 2 ($\phi'(t_0) = 2$).

b) Hvis vi skriver slik: $s(t) = s(h(t)) = \sqrt{h(t)^2 + 4}$, kan vi utrryke deriverte:
$$\frac{ds}{\mathrm{d}t} = \frac{d}{\mathrm{d}t}(\sqrt{h^2+4}) = \frac{d}{dh}(\sqrt{h^2+4}) \cdot \frac{dh}{\mathrm{d}t} = \frac{2h}{2\sqrt{h^2+4}} \cdot \frac{dh}{\mathrm{d}t} = \frac{h}{\sqrt{h^2+4}} \cdot \frac{dh}{\mathrm{d}t}$$
I oppgaven er det opplyst:
$$f(t) = F(\phi(t)) = \sqrt{(\phi(t))^2 + 4}$$
$$f'(t) = \frac{dF}{d\phi}\frac{d\phi}{dt} = \frac{\phi(t)}{\sqrt{(\phi(t))^2+4}} \cdot \phi'(t)$$

c) Deriver f og finn hvor fort sidekanten endres ved tiden t_0 når du får oppgitt at $\phi(t_0) = 20$.
$f'(t_0) = \frac{\phi(t_0)}{\sqrt{(\phi(t_0))^2 + 4}} \cdot \phi'(t_0) = \frac{20}{\sqrt{20^2 + 4}} \cdot 2 \simeq 1,99 \simeq 2$

Oppgave 14

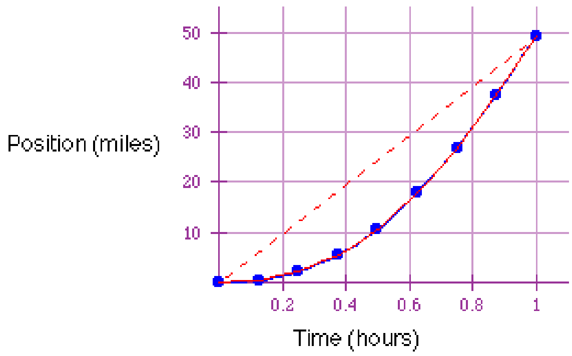
a) 1) Volumet til en kule er gitt ved: $V(r(t)) = \frac{4\pi}{3} r^3$. Ved å bruke kjerneregelen får vi:
$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 4\pi \cdot 50^2 \cdot 0,2 = 2000\pi \simeq 6283,2 cm^3/s.$

b) 2) Overflatearealet t til en kule er gitt ved: $S(r(t)) = 4\pi r^2$. Ved å bruke kjerneregelen får vi:
$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r} \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 8\pi r \cdot \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = 8\pi \cdot 50 \cdot 0,2 = 80\pi \simeq 251,3 cm^2/s.$

Oppgave 15

Figuren viser posisjonen til en bil i $0 \leq t \leq 1$ timer. Det kans leses av grafen:

a) Bestem gjennomsnittlig fart i intervallet ,25 $\leq t \leq 0,5$.



Tid, t	Posisjon,x
(hours)	(miles)
0.00	0.0
0.25	2.3
0.50	10.6
0.75	26.8
1.00	49.2

$$v = \frac{x_4 - x_0}{t_4 - t_0} = \frac{49,2 - 0,0}{1 - 0} = 49,2 \text{ mph (miles per hour).}$$

b) Anta at vi leser av grafen:

Tid, t	Posisjon,x
0.25	2,300
0.26	2,512

Beregn momentan hastighet i t = 0,25 .

$$v = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{2,512 - 2,300}{0,26 - 0,25} = 21,2 \text{ mph (miles per hour).}$$

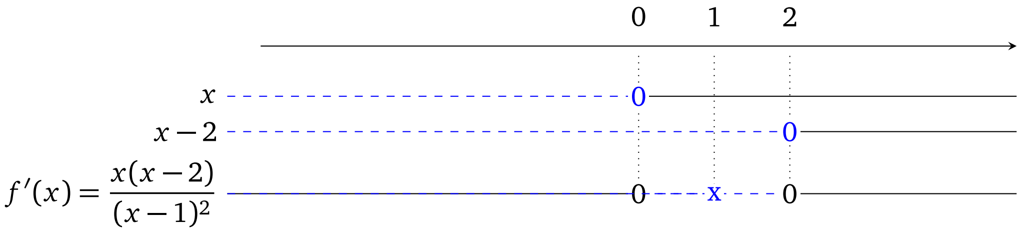
c) Tallene er stigningstallene til tangentene(de tre røde linjestykkene)

Oppgave 16

Gitt funksjonen $y = \dfrac{x^2}{x-1}$.

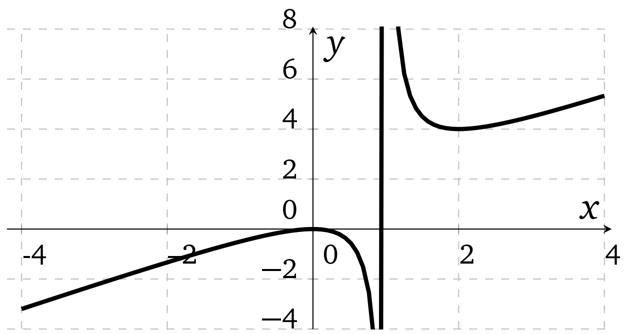
a) Bestem evenutelle nullpunkt og skjæringspunkt med y-aksen. Nullpunkt $f(x) = 0$ gir $x = 0$ og skjæringspunktet med y-aksen er $(0\,,\ \ 0)$.

b) $y' = \dfrac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.



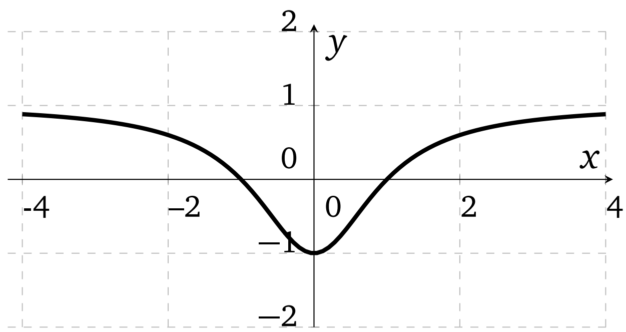
$x = 0$ er et lokalt maksimumpunkt med maksimalverdien $f(0) = 0$, mens $x = 2$ er et lokalt minimumspunkt med minimalverdien $f(2) = 4$. $x = 1$ er en vertikal asymptote (det er notert "x"i fortegnsskjemaet (bruddpunkt)).

Bemerk $x = 1$ er vertikal asymptote(det er notert "x"i fortegnsskjemaet (bruddpunkt)).



Oppgave 17

Vi skal tegne kurven til en funksjon $f(x)$.
$f(-x) = f(x)$ forteller oss at funksjonen er symmetrisk om y-aksen.
$f(0) = -1$ og $f(1) = 0$ og $f(+\infty) = 1$ kan da hjelpe oss å tegne kurven til f :



Kontrolloppgaver - Kapittel 7

Oppgave 1
Løs integralene:

a) $\displaystyle\int (\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}})\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int (\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x})\,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int (e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}})\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int (\frac{x^2+1}{x})\,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int (\frac{x^2}{1+x^3})\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int (\frac{\cos x}{1+\sin x})\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ h) $\displaystyle\int \sin x e^{\cos x}\,\mathrm{d}x$

i) $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ j) $\displaystyle\int (x^2 \ln x)\,\mathrm{d}x$

k) $\displaystyle\int x e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ l) $\displaystyle\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x$

Oppgave 2
Gitt funksjonen $y = e^{2x}$, $0 \le x \le \ln 3$.

a) Sett opp et integral som kan beregne arealet avgrenset mellom grafen til funksjonen og x-aksen. Regn ut arealet.

b) Arealet avgrenset mellom grafen til y og x-aksen roterer en gang om x-aksen. Bestem volumet av rotasjonslegemet.

Oppgave 3
Løs integralene: **a)** $\int x^2 e^{-x^3}\,\mathrm{d}x$ **b)** $\int x^2 \cos(2x)\,\mathrm{d}x$

Oppgave 4
Å puste er en syklisk bevegelse. En full respirasjonssyklus fra begynnelsen av inhalering til slutten av utpust tar omtrent 5 sek. Maksimal hastighet på luftstrømmen i lungene er om lag 0,5 liter/sek. Dette forklarer delvis hvorfor denne funksjonen

$$f(t) = (1/2)\sin(\frac{2\pi t}{5})$$

ofte er blitt brukt for å modellere hastigheten av luftstrømmen inn i lungene. Bruk denne modellen for å finne volumet av inhalert luft i lungene ved tiden T.

Oppgave 5
En funksjon er definert ved: $y(x) = x\cos x$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$.

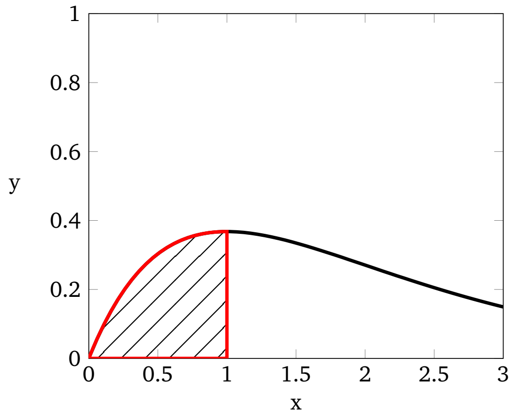
a) La $A(t)$ være arealet mellom kurven og x-aksen (fra $x = -\pi/2$ til $x = t$, der areal under x-aksen er negativt). Sett opp et funksjonsuttrykk for $A(t)$.
NB! Du behøver ikke gjøre utregninger.

b) Lag en skisse av hvordan grafen til $A(t)$ kan se ut (marker ekstremalpunkter og null-punkter)

Oppgave 6

Grafen viser kurven til $y(x) = xe^{-x}$ for $x \geq -1$.

a) Sett opp et integral som for arealetet A, mellom grafen til y og x-aksen i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Regn ut dette arealet.



b) Bergen volumet av omdreningslegemet som framkommer ved å dreie A om x-aksen.

Oppgave 7

Lengden av grafen til en funksjon $f(x)$ mellom $x = a$ og $x = b$ er gitt ved formelen

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, \mathrm{d}x.$$

Gitt funksjonen $f(x) = x^{3/2}$. Vis at integralet du må bruke for å regne ut lengden av grafen til f er

$$\int_a^b \frac{3}{2}\sqrt{x + \frac{4}{9}}\, \mathrm{d}x.$$

Finn lengden når $a = 0$ og $b = 1$.

Fasit - Kontrolloppgaver - Kapittel 7

Oppgave 1

a) $\int (\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}})\,\mathrm{d}x = \int (x^{1/2} + 2x^{-1/3})\,\mathrm{d}x = (2/3)x^{3/2} + 3x^{2/3} + C$

b) $\int (\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x})\,\mathrm{d}x = -2/x + 3\ln|x| + C$

c) $\int (e^{2x} + \frac{1}{e^{2x}})\,\mathrm{d}x = (1/2)e^{2x} - (1/2)e^{-2x} + C$

d) $\int (\frac{x^2+1}{x})\,\mathrm{d}x = \int (x + \frac{1}{x})\,\mathrm{d}x = (1/2)x^2 + \ln|x| + C$

e) $\int (\frac{x^2}{1+x^3})\,\mathrm{d}x = (1/3)\ln|1+x^3| + C$ (Substitusjon: $u = 1 + x^3$)

f) $\int (\frac{\cos x}{1+\sin x}) = \ln|1+\sin x| + C\,\mathrm{d}x$ (Substitusjon: $u = 1 + \sin x$)

g) $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = 2\sin\sqrt{x} + C$ (Substitusjon: $u = \sqrt{x}$)

h) $\int \sin x e^{\cos x}\,\mathrm{d}x = -e^{\cos x} + C$ (Substitusjon: $u = \cos x$)

i) $\int \frac{\ln^2 x}{x}\,\mathrm{d}x = (1/3)(\ln x)^3 + C$ (Substitusjon: $u = \ln x$)

j) $\int (x^2 \ln x)\,\mathrm{d}x = (1/3)x^3(\ln x - (1/3)) + C$ (Delvis integrasjon: $u = \ln x$ og $v' = x^2$)

k) $\int xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = (1/2)e^{x^2} + C$ (Substitusjon: $u = e^{x^2}$)

l) $\int x^2 e^x\,\mathrm{d}x = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$

(To ganger delvis integrasjon: 1) $u = x^2$ og $v' = e^x$, og 2) $u = x$ og $v' = e^x$)

Oppgave 2

a) $A = \int_0^{\ln 3} e^{2x}\,\mathrm{d}x = (1/2)e^{2x}\Big|_0^{\ln 3} = (1/2)(9-1) = 4$

b) $V = \pi \int_0^{\ln 3} (e^{2x})^2\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^{\ln 3} e^{4x}\,\mathrm{d}x = (\pi/4)e^{4x}\Big|_0^{\ln 3} = (\pi/4)(3^4 - 1) = 20\pi$

Oppgave 3

a) $\displaystyle\int x^2 e^{-x^3}\, \mathrm{d}x = -(1/3)e^{-x^3} + C$ (Substitusjon: $u = e^{-x^3}$)

b) $\displaystyle\int x^2 \cos(2x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{2x^2 - 1}{4} \sin 2x + C$ (To ganger delvis integrasjon)

Oppgave 4

$$\int_{t=0}^{t=T} (1/2)\sin(\frac{2\pi t}{5})\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\frac{5}{2\pi}\cos(\frac{2\pi t}{5})\Big|_0^T = \frac{5}{4\pi}[1 - \cos(\frac{2\pi T}{5})]$$

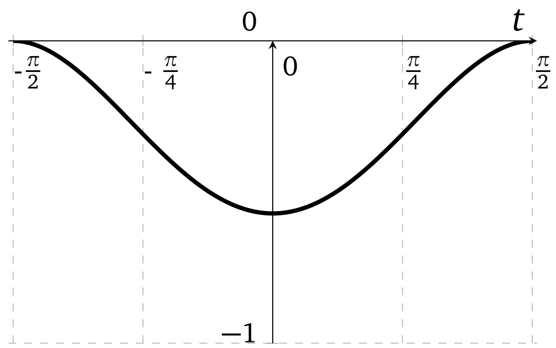
Oppgave 5

$y(x) = x \cos x,\ -\pi/2 \le x \le \pi/2$.

a)

$$A(t) = \int_{x=-\pi/2}^{x=t} x \cos x\, \mathrm{d}x = x \sin x + \cos x \Big|_{-\pi/2}^{t} = t \sin t + \cos t - \frac{\pi}{2}$$

b) Vi vet at $A(t)$ er null når $t = -\pi/2$. Så vil den avta (det er bare negative bidrag), fram til $t = 0$. Fra da vil $A(t)$ bare få *positive* bidrag, så den vil øke mot et nytt nullpunkt for $t = \pi/2$. Figuren viser kurven til $A(t)$.



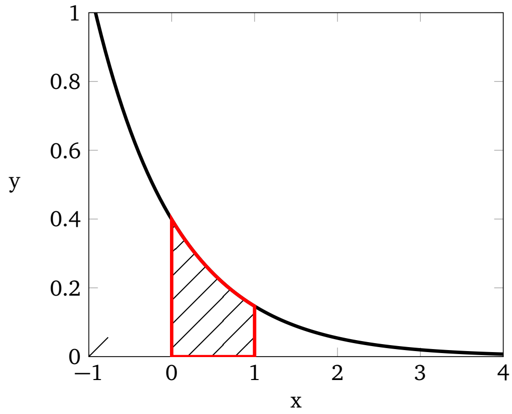
Minimumspunktet er $t = 0$ med minimalverdi A=$-\frac{\pi}{2}$.

Nullpunktene er $t = -\frac{\pi}{2}$ og $t = \frac{\pi}{2}$.

Oppgave 6

$y(x) = xe^{-x}$ for $x \ge -1$.

a) $A = \int_0^1 xe^{-x}\, \mathrm{d}x = -xe^{-x} - e^{-x}\Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$.



b) $V = \pi \int\limits_0^1 (xe^{-x})^2 \, dx = \pi \int\limits_0^1 x^2 e^{-2x} \, dx = -\pi(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2)e^{-2x}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}(1 - \frac{5}{e^2}).$

Oppgave 7

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{3}{2}x^{1/2})^2} \, dx = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} \, dx = \int_a^b \frac{3}{2}\sqrt{x + \frac{4}{9}} \, dx.$$

Gitt funksjonen $f(x) = x^{3/2}$. Vis at integralet du må bruke for å regne ut lengden av grafen til f er

$$\int_0^1 \frac{3}{2}\sqrt{x + \frac{4}{9}} \, dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{(x + \frac{4}{9})^3}\Big|_0^1 = \frac{13\sqrt{13} - 8}{27}.$$

Kontrolloppgaver - Kapittel 8

Oppgave 1
Løs ligningene:

a) $x^2 + 9 = 0$ b) $z^2 - 4z + 5 = 0$.

Oppgave 2
Regn ut og skriv svarene på standard form:

a) $(1 + 2i) \cdot (4 - 5i)$

b) $(3 + 4i)^{-1}$

c) $(2 + 2i)^8$

d) $(-2 + 2i)^4$

Oppgave 3

Gitt $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -1 + i$.

a) Regn ut $z_1 \cdot \bar{z}_1$, $z_1 z_2$ og $\dfrac{z_1}{z_2}$.

b) Regn ut : z_1^8.

Oppgave 4

Gitt $z = e^{i\alpha}$, der $0 \leq \alpha \leq pi$

a) Tegn inn z i et kompleksplan.

b) Hvis at det å multipliser z med i kan bety å vri z med $\dfrac{\pi}{2}$ mot urretningen.

Fasit - Kontrolloppgaver - Kapittel 9

Oppgave 1

a) En differensialligning beskriver en sammenheng mellom en funksjon og dens deriverte.
For eksempel, hvis vekstraten $\frac{dy}{dx}$ er proporsjonal med y, kan man få differensialligningen:
$\frac{dy}{dx} = ay$, der a er proporsjonalitetskonstanten. Generelt en differensialligning er en ligning som forbinder en uavhengig variabel x, en avhengig variabel y og dens deriverte:

$$G(x, y, y', y'', \cdots) = 0$$

Hensikten med å løse en differensialligning er å bestemme funksjonen, $y = y(x)$.

Hvis $y = y(x)$ er en løsning til en differensialligning, vil det si at $y = y(x)$ tilfredsstiller ligningen.

b) En lineær homogen differensiallligning: $y' + x^3 y = 0$
En ikke-lineær inhomogen differensiallligning: $y' + xy^2 = \cos x$

c) $y' + x^2 y - x - \cos y = 0$ er en førsteordens inhomogen ikke-lineær differensialligning.

Oppgave 2

$$\text{a)} \quad y' = x^2 y \qquad \text{b)} \quad y' = xy^2$$

a) er lineær og b) er ikke-lineær.
For å løse disse kan vi benytte separasjonsmetoden.
a) $y = Ce^{x^3/3}$, $y = 0$. quad b) $y = \dfrac{-1}{x^2/2 + C}$ $y = 0$.

Oppgave 3

a)	$y = x - (1/2)x^2 + C$	b)	$y = Ce^{-x} + 1$
c)	$y = Ce^{-\arctan x}$, $y = 0$	d)	$y = Ce^{-\cos x}$, $y = 0$
e)	$y = Ce^{-2x} + 3$	f)	$y = Ce^{-3x} + 4$
g)	$y = \dfrac{2}{1 + Ce^{-2x}}$, $y = 0$	h)	$y = \dfrac{4}{1 + Ce^{-12x}}$, $y = 0$

Oppgave 4

a) Likevektløsningene til : $y' = y(y-3)$ er $y = 0$ og $y = 3$.
Likevektspunk er der $y' = 0$. Første er ustabilt og den andre er stabilt: $y' = g(y) = y^2 - 3y$ gir $g'(y) = 2y - 3$:
For $y = 0$ er $g'(0) < 0$ (ustabilt) og $g'(3) > 0$ (stabilt).

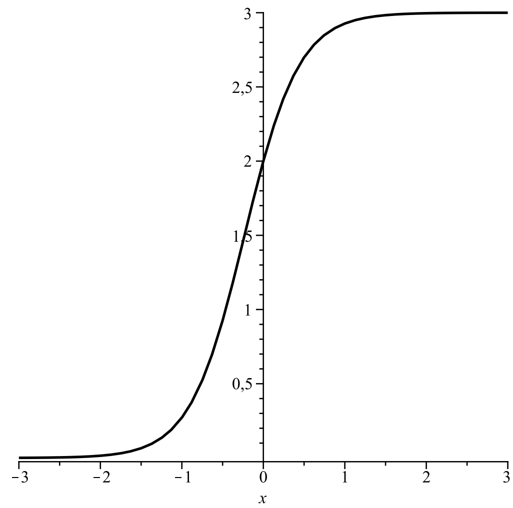
b) Gitt y(0)= 0, bestem y(1).(Her trenge du ikke å løse differensiallignigen) $y = 0$ er en likevektløsning og dermed $y(1) = 0$.
Bemerk at $y(1) = y(0) + y'(0)(1-0)$, der $y' = y^2 - 3y$ og $y'(0) = 0$, som gir $y(1) = 0$.

c) Løs differensialligningen. Gitt $y(0) = 2$, bestem $y(1)$.

$y = \dfrac{3}{1 + Ce^{-3x}}$.

$y(0) = 2$ gir $y = \dfrac{3}{1 + 0,5e^{-3x}}$ og dermed

$y(1) = \dfrac{3}{1 + 0,5e^{-3}}$.



$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{1 + 0,5e^{-3x}} = 3$$

Oppgave 5

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3t^2 + 2t + 5}{y^2}$, gitt $y(0) = 3$.

$\int y^2\,dy = \int (3t^2 + 2t + 5)\,dt$ eller

$\frac{1}{3}y^3 = t^3 + t^2 + 5t + C$ og dermed:

$y = \sqrt[3]{3(t^3 + t^2 + 5t + C)}$. $y(0) = 3$ medfører: $y = \sqrt[3]{3(t^3 + t^2 + 5t + 9)}$.

Oppgave 6

Ubestemte koeffisienters metode:

a)	$y'' - y = 1$	$y = y_h + y_s = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1$
b)	$y'' - 4y' + 3y = 3t + 2$	$y = y_h + y_s = C_1e^x + C_2e^{3x} + t + 2$
c)	$y'' + 4y = x$	$y = y_h + y_s = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}x$
d)	$y'' = 9y$	$y = y_h + y_s = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x}$

Oppgave 7

a)

$$\frac{dK}{dt} = 3(0,2 - \frac{1}{200}K) = 0,6 - \frac{3}{200}K, \quad K(0) = 0 (\text{frisk luft ved} \quad t = 0)$$

b) $K(t) = 40 - 40e^{-3t/200}$

c) $K(T) = 0,01 \cdot 200 = 2$ gir $T = 200/3(\ln 20 - \ln 19)$.

Oppgave 8

a)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0,1x - 150 \cdot 12 = 0,1x - 1800, \quad x(0) = 10.000$$

b) $x(t) = Ce^{0,1t} + 18000$ og $x(0) = 10.000$ gir
$x(t) = -8000e^{0,1t} + 18000$.
Nedbetalingstiden er : $t = 10 \ln 2,25 \simeq 8,1$ år.

Oppgave 9
$y' = y^2 - y = y(y-1)$
$y = \dfrac{1}{1 + Ce^t}$
$y(0) = 0,9$ gir $y = \dfrac{1}{1 + (1/9)e^t}$ og dermed:
$\lim_{t \to \infty} y(t) = 0$.

Fasit - Kontrolloppgaver - Kapittel 8

Oppgave 1

a) $x = \pm 3i$ b) $z = 2 \pm i$

Oppgave 2

a) $(1+2i)\cdot(4-5i) = 14+3i$

b) $(3+4i)^{-1} = \dfrac{1}{3+4i} = \dfrac{3-4i}{(3+4i)(3-4i)} = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$

c) $(2+2i)^8 = (2\sqrt{2}e^{i\pi/4})^8 = 2^{12}e^{i2\pi} = 4096$

d) $(-2+2i)^4 = (2\sqrt{2}e^{i3\pi/4})^4 = 2^6 e^{i3\pi} = -64$

Oppgave 3

a) $z_1 \cdot \bar{z}_1 = (2-2i)(2+2i) = 2^2 + (-2)^2 = 8.$ Bemerk $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

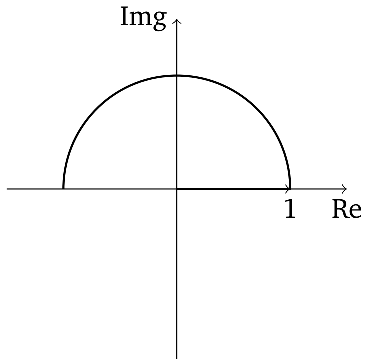
b) $z_1 z_2 = (2-2i)(-1+i) = 4i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-2i}{-1+i} = \frac{(2-2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = -2$$

c) $z_1^8 = (2\sqrt{2}e^{i-\pi/4})^8 = 2^{12}e^{-i2\pi} = 4096.$

Oppgave 4

a) z kan presenteres med en halvsirkel med radien 1 et kompleksplan.



b) Hvis at det å multipliser z med i kan bety å vri z med $\dfrac{\pi}{2}$ mot urretningen.
$z \cdot i = e^{i\alpha} \cdot e^{i\pi/2} = e^{i(\alpha+\pi/2)}$

Kontrolloppgaver - Kapittel 9

Oppgave 1

a) Hva er en differensialligning? Hva vil det si at $y = y(x)$ er en løsning til en differensialligning.

b) Ta et eksempel for en lineær homogen differensiallligning. Ta et eksempel for en ikke-lineær inhomogen differensiallligning.

c) Klassifiser differensialligningen $y' + x^2y - x - \cos y = 0$.
(orden, homogen/inhomogen, lineær/ikke-lineær)

Oppgave 2

Gitt differensialligningene:

$$\text{a)} \quad y' = x^2 y \qquad \text{b)} \quad y' = xy^2$$

Hva er største forskjellen mellom disse? Løs differensialligningene.

Oppgave 3

Løs differensialligningene:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & y' + x = 1 & \text{b)} & y' + y = 1 \\ \text{c)} & (1+x^2)y' + y = 0 & \text{d)} & y' = y \sin x \\ \text{e)} & y' + 2y = 6 & \text{f)} & y' = 12 - 3y \\ \text{g)} & y' = y(2-y) & \text{h)} & y' = 12y - 3y^2 \end{array}$$

Oppgave 4

Betrakt differensialligningen:

$$y' = y^2 - 3y$$

a) Finn likevektløsningen(e). Studere stabilitet til hver av disse(stabil, ustabil). Begrunn svaret.

b) Gitt y(0)= 0, bestem y(1).(Her trenge du ikke å løse differensialligningen)

c) Løs differensialligningen.
Gitt $y(0) = 2$, tegn grafen til løsningskurven og regn ut $y(1)$. Bestem $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)$.

Oppgave 5

Løs differensialligningen : $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{3t^2 + 2t + 5}{y^2}$, gitt $y(0) = 3$

Oppgave 6

Løs differensialligningene

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & y'' - y = 1 & \text{b)} & y'' - 4y' + 3y = 3t + 2 \\ \text{c)} & y'' + 4y = x & \text{d)} & y'' = 9y \end{array}$$

Oppgave 7

Et klasserom (20m × 4m × 2,5m) inneholder i utgangspunktet frisk luft. Ved $t = 0$, en defekt varmesystem fører gass som inneholder 20% karbonmonoksid som skal pumpes inn i rommet ved en hastighet på 3 m^3 per minutt. Den godt blandede luft ventileres ut i samme takt.

a) Forklar hvor følgende startverdiproblem beskriver denne situasjonen:

$$\frac{dK}{\mathrm{d}t} = 0,6 - \frac{3}{200}K, \quad K(0) = 0$$

der $K(t)$ er karbonmonoksid mengden ved tiden t (målt i min.) i rommet.

b) Løs startverdiproblemet.

c) En karbonmonoksid-detektor i rommet utløses når karbonmonoksid når 1%. Finn tiden når detektoren vil varsle.

Oppgave 8
En høyskolestudent skylder kr.10.000 til et kredittkort selskap, med en rente på 10% per år. Studenten betalinger ned kontinuerlig med et konstant rate på kr. 150 per måned (kr. 1800 per år).

a) Forklar hvor følgende startverdiproblem beskriver denne situasjonen:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0,1x - 1800, \quad x(0) = 10.000$$

der $x(t)$ er beløpet studenten skylder kredittkortselskapet ved tiden t (målt i år).

b) Løs startverdi problemet. Regn ut nedbetalingstiden.

Oppgave 9
Betrakt differensialligningen:

$$y' = y^2 - y$$

Gitt y(0)= 0,9. Bestem $\lim_{t\to\infty} y(t)$. (Her trenge du ikke å løse differensiallignigen).

Kontrolloppgaver - Kapittel 10

Oppgave 1

Gitt to vektorer $\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ og $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$.

a) i) Bestem vinkelen mellom vektorerene **u** og **v**.
Bestem en enhetsvektor langs **u**. Bestem lengden til vektoren **v** langs **u**.
ii) Finn en vektor $\mathbf{w_1}$ som står normalt på både **u** og **v** .
iii) Finn en vektor $\mathbf{n_1}$ som står normalt på både **u** og **v** , og som har lengde 1.
Hvor mange slike vektorer finnes det?

b) i) Finn ei uttrykk for planet som går gjennom punktet $P = (2, -1, 3)$, og som har vektoren $\mathbf{w_1}$ som normalvektor.
ii) Gå ut fra at de to vektorane $\mathbf{w_1}$ og $\mathbf{n_1}$ du fant i a) er ulike. Vil det bety noe for planet du fant om du hadde valgt $\mathbf{n_1}$ som normalvektor i steden for?

c) i) Hva er den korteste avstanden fra origo til planet du har funnet i del **b i)**?
ii) Hva er den korteste avstanden fra punktet $M(5, -3, 1)$ til planet i del **b i)**

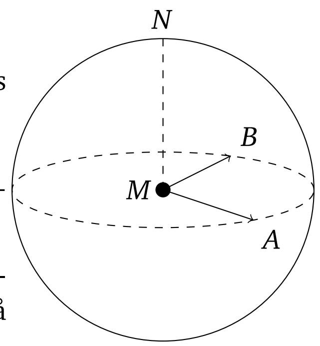
Oppgave 2

a) Gitt at $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, der vi vet at $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ og $|\mathbf{u}| = 3$. La også **e** være en enhetsvektor rettet *motsatt* av **u**.

i) Regn ut $\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}$. Angi skalarprojeksjonen av **w** inn på en akse med samme retning som **e**.

ii) Vi får også oppgitt at $|\mathbf{v}| = 2$. Regn ut $|\mathbf{w} \times \mathbf{e}|$.

Vi ser så på en kule med radius 4. Tenk på punktet N som kulas «nordpol», og M som kulas midtpunkt (sentrum). Vektorene $\overrightarrow{MB}$ og $\overrightarrow{MA}$ er ortogonale, og de er tegnet i planet som står vinkelrett på $\overrightarrow{MN}$ og går gjennom M.



b) Vi velger en ortonormert basis **i**, **j** og **k** med **i** langs $\overrightarrow{MA}$ og **j** langs $\overrightarrow{MB}$.

i) Punktet P på kuleflaten er gitt ved $\overrightarrow{MP} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + t\mathbf{k}$. Vis at da må $t = \pm\sqrt{3}$.

ii) Vi velger så $t = \sqrt{3}$. Finn da likningen for planet som går gjennom P og står vinkelrett på $\overrightarrow{MP}$. Sett origo i M.

iii) Bestem en enhetsvektor langs linjen som går gjennom A og N.

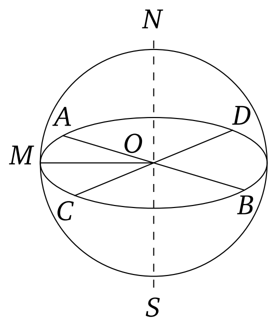
Oppgave 3

a) La **n** være en enhetsnormalvektor til et plan. En vektor **a**, som har lengde $|\mathbf{a}| = 3$, ligger i planet.

i) Forklar hvorfor $\mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{n}$ også ligger i planet. Finn $|\mathbf{b}|$, og deretter en enhetsvektor i samme retning som $\mathbf{b}$ (uttrykt ved $\mathbf{n}$ og $\mathbf{a}$).

ii) Anta så at $\mathbf{n} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Vi har gitt vektoren $\overrightarrow{AP} = \mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, der A er et punkt i planet og P et punkt utenfor planet. Finn skalarprojeksjonen av $\mathbf{a}$ inn på $\mathbf{n}$. Finn også avstanden fra P ned til planet.

b) Figuren viser en kule med radius 4 og sentrum i O. La N og S være «nordpol» og «sydpol» på kulen. AB og CD er to linjestykker som står vinkelrett på hverandre, og som ligger i «ekvatorplanet». Vi velger en høyrehånds ortonormert basis $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$, der $\overrightarrow{OA} || \mathbf{i}$ og $\overrightarrow{ON} || \mathbf{k}$. M ligger midt mellom A og C. Et punkt P på overflaten av kulen er gitt ved $\overrightarrow{OP} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\sqrt{2}\,\mathbf{k}$.



i) Sett opp vektorene $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{OM}$ og $\overrightarrow{MN}$.

ii) Sett opp en normalvektor for planet gjennom M, A og N.
Sett opp en enhetsvektor langs denne normalvektoren. Bestem avstanden fra punktet P til dette planet.
Sett opp ligningen for planet gjennom M, A og N. Bruk S som origo.

Fasit - Kontrolloppgaver - Kapittel 10

Oppgave 1

$\mathbf{u} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ og $\mathbf{v} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$.

a) i) $\cos\theta = \dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|} = -\dfrac{2}{3\sqrt{5}}$, dermed $\theta = 107,3°$.

$\mathbf{v}\cdot\dfrac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = [1,0,-2]\dfrac{[2,1,2]}{3} = -\dfrac{2}{3}$.

ii) $\mathbf{w_1} = \mathbf{u}\times\mathbf{v} = [2,1,2]\times[1,0,-2] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = [-2,6,-1]$

iii) $\mathbf{n_1} = \dfrac{\mathbf{w_1}}{|\mathbf{w_1}|} = \dfrac{1}{\sqrt{41}}[-2,6,-1]$.

$\mathbf{n_2} = -\mathbf{n_1} = \dfrac{1}{\sqrt{41}}[2,-6,1]$ (enhetsvektor i motsatt retning).

b) i) $-2(x-2)+6(y+1)-1(z-3) = 0$ og dermed $-2x+6y-z = -13$.

ii) Nei, det hadde ikke vært noe forskjell.

c) i) $d = |\mathbf{OP}\cdot\mathbf{n_1}| = |[2,-1,3]\cdot\dfrac{1}{\sqrt{41}}[-2,6,-1]| = |-\dfrac{13}{\sqrt{41}}| = \dfrac{13\sqrt{41}}{41}$

(minus fortegnet forteller at punktet P ligger på andre siden til planet i forhold til $\mathbf{n_1}$.

ii) $d = |\mathbf{MP}\cdot\mathbf{n_1}| = |[-3,2,2]\cdot\dfrac{1}{\sqrt{41}}[-2,6,-1]| = \dfrac{16}{\sqrt{41}} = \dfrac{16\sqrt{41}}{41}$

Oppgave 2

a) Gitt at $\mathbf{w} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$, der vi vet at $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ og $|\mathbf{u}| = 3$. La også $\mathbf{e}$ være en enhetsvektor rettet *motsatt* av $\mathbf{u}$.

i) Når $\mathbf{w} = \mathbf{u}+\mathbf{v}$ blir $\mathbf{w}\cdot\mathbf{e} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{e}+\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}$. Nå er $\mathbf{u}\perp\mathbf{v}$ og $\mathbf{e}$ er *parallell* med $\mathbf{u}$, derfor er også $\mathbf{e}\perp\mathbf{v}$, og altså $\mathbf{e}\cdot\mathbf{v} = 0$. Nå er $\mathbf{e}$ *motsatt rettet* av $\mathbf{u}$, og $|\mathbf{u}| = 3$. Da blir $\mathbf{u} = -3\mathbf{e}$, og $\mathbf{u}\cdot\mathbf{e} = -3$ (da $\mathbf{e}\cdot\mathbf{e} = 1$). Samlet blir altså $\mathbf{w}\cdot\mathbf{e} = -3$.

Dette er også (per definisjon) skalarprojeksjonen av $\mathbf{w}$ inn på en akse parallell med $\mathbf{e}$.

ii) Vi vet at $|\mathbf{w}\times\mathbf{e}| = |\mathbf{w}|\cdot 1\cdot\sin\theta$, der θ er vinkelen mellom $\mathbf{w}$ og $\mathbf{e}$. Vi bruker tilsvarende regneregel for vektorprodukt som for skalarprodukt i sted:

$$\mathbf{w}\times\mathbf{e} = \mathbf{u}\times\mathbf{e}+\mathbf{v}\times\mathbf{e} = \mathbf{v}\times\mathbf{e} \quad \text{fordi } \mathbf{u}\parallel\mathbf{e} \text{ gir at } \mathbf{u}\times\mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

Vi får da (litt enklere) $|\mathbf{w}\times\mathbf{e}| = |\mathbf{v}\times\mathbf{e}| = |\mathbf{v}|\cdot 1\cdot\sin(\frac{\pi}{2}) = 2$.

b) **i)** $|\overrightarrow{MP}| = 4$ (dette er radius i kulen). Vi får altså $\sqrt{2^2+3^2+t^2} = 4$, eller $\sqrt{t^2+13} = 4$, eller $t^2 + 13 = 16$, som gir $t = \pm\sqrt{3}$.

ii) Vi må kjenne ett punkt i planet, og en normalvektor til planet. Vi kjenner $P = (2, 3, \sqrt{3})$, og normalvektoren $\mathbf{n} = \overrightarrow{MP} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}$. For et vilkårlig punkt $Q = (x, y, z)$ i planet vil vi da ha likningen

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_x(x-x_0) + \mathbf{n}_y(y-y_0) + \mathbf{n}_z(z-z_0) &= 0 \\ 2(x-2) + 3(y-3) + \sqrt{3}(z-\sqrt{3}) &= 0 \\ 2x + 3y + \sqrt{3}z &= 16 \end{aligned}$$

iii) Med origo i M kan vi skrive $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$. Lengden av denne er $|\overrightarrow{AN}| = \sqrt{(-4)^2+4^2} = 4\sqrt{2}$. En enhetsvektor $\mathbf{e}$ har (per definisjon) lengde lik 1, slik at $\overrightarrow{AN} = 4\sqrt{2}\mathbf{e}$, og $\mathbf{e} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{j}$.

Oppgave 3

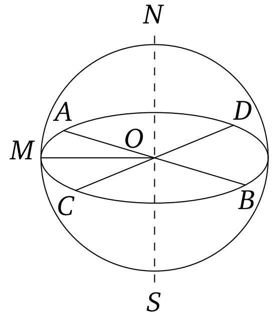
a) **i)** Fordi $\mathbf{n}$ er normal på både $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$, dermed de 2 vektorene ligger i samme plan.
$|\mathbf{b}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{n}| = |\mathbf{a}||\mathbf{n}| \sin 90^o = |\mathbf{a}| = 3$
$\mathbf{e} = \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \dfrac{1}{3}(\mathbf{a} \times \mathbf{n})$

ii) Anta så at $\mathbf{n} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Vi har gitt vektoren $\overrightarrow{AP} = \mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, der A er et punkt i planet og P et punkt utenfor planet. Finn skalarprojeksjonen av $\mathbf{a}$ inn på $\mathbf{n}$. Finn også avstanden fra P ned til planet.

$$\mathbf{a} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = [1, -2, 3] \cdot \frac{1}{3}[1, 2, 2] = 1$$

Avstanden er da 1.

b)



i) Når $\mathbf{i}$ og $\mathbf{k}$ er bestemt i et høyrehåndssystem er også $\mathbf{j}$ bestemt; den må være $\overrightarrow{MC}$. Vektoren $\overrightarrow{CP}$ kan vi nå skrive som

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OC} = \left(2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\sqrt{2}\mathbf{k}\right) - 4\mathbf{k} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\sqrt{2}\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} = 4\mathbf{k} - 4\mathbf{i} = -4\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = t\,(4\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) \qquad \text{gitt} \quad |\overrightarrow{OM}| = 4 \qquad \text{gir} \quad t = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\overrightarrow{OM} = 2\sqrt{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = 4\mathbf{k} - \left(2\sqrt{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j}\right) = -2\sqrt{2}\mathbf{i} - 2\sqrt{2}\mathbf{j} + 4\mathbf{k}.$$

ii) For å sette opp normalvektor for planet:

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{AN} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2\sqrt{2} & -2\sqrt{2} & 4 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8\left(-\sqrt{2}\mathbf{i} + (\sqrt{2}-2)\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}\right)$$

En enhetsvektor langs normalvektoren er da:

$$\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{8\left(-\sqrt{2}\mathbf{i} + (\sqrt{2}-2)\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}\right)}{8\sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}-2)^2 + (-\sqrt{2})^2}} = \frac{\left(-\sqrt{2}\mathbf{i} + (\sqrt{2}-2)\mathbf{j} - \sqrt{2}\mathbf{k}\right)}{\sqrt{10 - 4\sqrt{2}}}.$$

For å bestemme et plan kan vi bruke et punkt i planet og en normalvektor. Koordinatene til punktet er A med S som origo kan bestemmes ved: $\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA} = 4\mathbf{k} + 4\mathbf{i} = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$. Koordinatene til A er da $(4, 0, 4)$; koordinatene til et punkt er de samme som koordinatene (komponentene) til posisjonsvektoren fra origo til punktet. Her er S origo, og posisjonsvektoren er $\overrightarrow{SP}$. Normalvektoren er $\mathbf{n} = \overrightarrow{MN} \times \overrightarrow{AN}$ (alle tangentplan har vektoren fra sentrum i kula (M) og ut til tangeringspunktet (P) som normalvektor). Med utgangspunkt i definisjonen av et plan (*Mathema 1*, side 255) kan vi da skrive opp likningen

$$-\sqrt{2}(x-4) + (\sqrt{2}-2)(y-0) - \sqrt{2}(z-4) = 0$$
$$-\sqrt{2}x + (\sqrt{2}-2)y - \sqrt{2}z + 8\sqrt{2} = 0$$

eller (multipliser med $-\sqrt{2}/2$ på begge sider) $x + (\sqrt{2}-1)y + z = 8$.

For å beregne avstanden, kan vi bruke skalar projeksjonen til $\overrightarrow{AP}$ inn på $\mathbf{n}$: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = [-2, 2, 2\sqrt{2}]$

Avstanden er da:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = [-2, 2, 2\sqrt{2}] \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{2}-1)^2 + 1^2}}[1, \sqrt{2}-1, 1] = \frac{4(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}$$

Kontrolloppgaver - Kapittel 11

Oppgave 1
En kvadratisk matrise $A_{n\times n}$ kan diagonaliseres bare og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer. Hvis A er *diagonaliserbar*, og $A = MDM^{-1}$, så er kolonnene til M egenvektorene til A og D er diagonalmatrisen med de tilhørende egenverdiene på diagonalen.

a) Gitt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.
Løs egenverdiproblemet og diagonaliser matrisene.

b) Gitt differensialligningssystemer:

(I) $\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= 2x - 2y \end{aligned}$ (II) $\begin{aligned} x' &= x - 2y \\ y' &= x + 4y \end{aligned}$ (III) $\begin{aligned} x' &= -4x - 2y \\ y' &= 2x - 3y \end{aligned}$

i) Løs disse og tegn faseplan. Bestem likevektspunktet og karaktereriser likevektspunket (asymptotisk stabilt eller ustabilt)

ii) Bestem regningsderiverte i punktet $(1, -1)$ og tegn inn retningen til løsningskurven i dette punktet i faseplanet.

Oppgave 2

(a) Gitt differensialligningssystemer:

(I) $\begin{aligned} x' &= 2x + 2y \\ y' &= x + 3y \end{aligned}$ (II) $\begin{aligned} x' &= -5x + y \\ y' &= 4x - 2y \end{aligned}$ (III) $\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= 3x + 2y \end{aligned}$

a) Løs differensialligningssystemer. Bestem likevektspunktet og karaktereriser likevektspunket (asymptotisk stabilt eller ustabilt)

b) Bestem regningsderiverte i punktet $(-1, 2)$.

Oppsummering- Differensialligningssystemer

1. Et 2×2 lineært homogent system av differensialligninger kan skrives som:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

2. Egenverdiproblemet for $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

   1) Den karakteristiske ligningen for systemet gir to egenverdier: $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$
   Bemerk: $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ og $\lambda_1\lambda_2 = ad - bc$
   2) Egenvektorene bestemmes ved: $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$.
   Bemerk: Hvis egenverdiene er like, finner man den andre egenvektoren ved $(A - \lambda I)\mathbf{v_2} = \mathbf{v_1}$.

3. Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og for dette systemet er origo $(x, y) = (0, 0)$

4. Anta tilhørende egenvektorer kan være $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$. Løsningen kan skrives om:

$$y = \begin{cases} C_1\mathbf{v_1}e^{\lambda_1 t} + C_2\mathbf{v_1}e^{\lambda_1 t} & \lambda_1 \neq \lambda_1 \text{ (reelle)} \\ e^{\lambda t}(\mathbf{v_1}(C_1 + C_2 t) + C_2\mathbf{v_2}) & \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \text{ (reelle)} \end{cases}$$

   For komplekse egenverdier, $\lambda = \alpha \pm i\beta$, som gir egenvektorene

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi \pm i\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \end{bmatrix} = \mathbf{p} \pm i\mathbf{q}$$

   kan løsningen skrives på formen (ikke vektlagt i pensum):

$$\begin{aligned} y = \quad & C_1 e^{\alpha t}(\mathbf{p}\cos\beta t - \mathbf{q}\sin\beta t) + \\ & C_2 e^{\alpha t}(\mathbf{p}\cos\beta t + \mathbf{q}\sin\beta t) \end{aligned}$$

5. Karakterisering av likevektpunktet

Egenverdi	Likevektspunktet
$\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 > 0$	Ustabilt (knutepunkt-ut)
$\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 < 0$	Ustabilt (sadelpunkt)
$\lambda_1 < 0$ og $\lambda_2 < 0$	Asymptotisk stabilt (knutepunkt-in)
$\lambda = \alpha \pm i\beta$	$\alpha > 0$ Ustabilt (Spiral ut- kilde)
	$\alpha < 0$ Asymptotisk stabilt (Spiral inn- sluk)
	$\alpha = 0$ stabilt (senter)

6. Den generelle løsningen til det lineære inhomogene differensialligningssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + u \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + v \end{cases}$$

der u og v er konsranter, kan skrives på formen $\mathbf{x} = \mathbf{x_h} + \mathbf{x_p}$, der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

$\mathbf{x_h}$ er løsningen til den homogene differensialligningssystemet.
$\mathbf{x_p}$ er løsningen til :

$$\begin{cases} x' = ax + by + u \\ y' = cx + dy + v \end{cases}$$

Fasit - Kontrolloppgaver - kapittel 11

Oppgave 1

a) $\lambda_1 = -3$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ og $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Man kan sjekke:
$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ (summen av egenverdiene er lik summen til elementene på hoveddiagonalen: $-3 + 2 = 1 + (-2)$ OK!)

$\lambda_1 = 2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Sjekk: $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$: 2+3 = 1 +4 OK!

$\lambda_1 = -5$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Sjekk: $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$: $-5 + (-2) = -4 + (-3)$ OK!

b) **i)** **(I)** Løsning: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$

Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og dermed systemet har likevekt i $(x, y) = (0, 0)$ (Ustabilt : en av egenverdiene er positiv)

(II) Løsning: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$

Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og dermed systemet har likevekt i $(x, y) = (0, 0)$ (ustabilt : begge egenverdiene er positive)

(III) Løsning: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$

Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og
dermed systemet har likevekt i $(x, y) = (0, 0)$. (Asymtotisk stabilt: begge egenverdiene er negative)

ii) **(I)** Retningsderivert: (retningsderivert kan tegnes som en liten vektor $[-3, 2]$ ut fra punktet $(1, -1)$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(II) Retningsderivert: (retningsderivert kan tegnes som en liten vektor $[3, -3]$ ut fra punktet $(1, -1)$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(III) Retningsderivert: (retningsderivert kan tegnes som en liten vektor $[-5, 5]$ ut fra punktet $(1, -1)$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2

(I) a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$

Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og
dermed systemet har likevekt i $(x, y) = (0, 0)$.
Ustabilt (knutepunkt-ut)
b) Retningsderivert: (retningsderivert kan tegnes som
en vektor $[2, 5]$ ut fra punktet $(-1, 2)$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(II) a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-6t}$

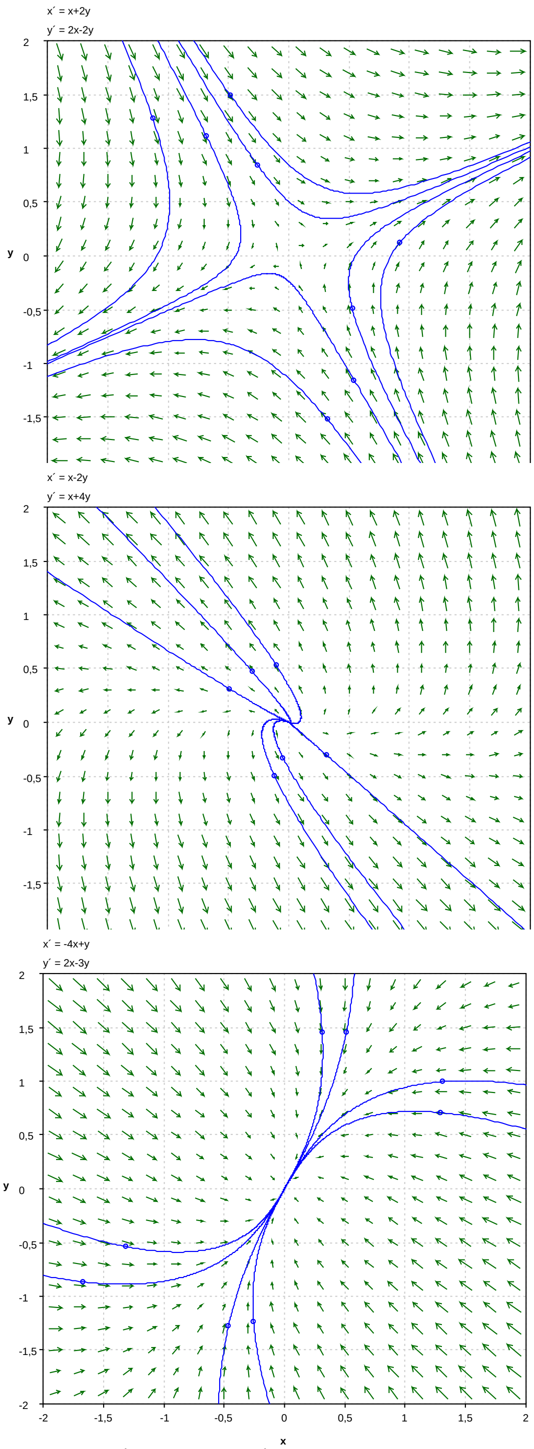
Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og
dermed systemet har likevekt i $(x, y) = (0, 0)$.
Asymptotisk stabilt (knutepunkt-inn)
b) Retningsderivert: (retningsderivert kan tegnes som
en liten vektor $[7, -8]$ ut fra punktet $(-1, 2)$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

(III) a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t}$

Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og
dermed systemet har likevekt i $(x, y) = (0, 0)$.
Ustabilt (knutepunkt-ut)
b) Retningsderivert: (retningsderivert kan tegnes som
en liten vektor retning til $[3, 1]$ ut fra punktet $(-1, 2)$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Figur 1: Fasit- Oppgave 1

Oppsummering- Differensialligningssystemer

1. Et 2×2 lineært homogent system av differensialligninger kan skrives som:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

2. Egenverdiproblemet for $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

   1) Den karakteristiske ligningen for systemet gir to egenverdier: $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$
   Bemerk: $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ og $\lambda_1\lambda_2 = ad - bc$
   2) Egenvektorene bestemmes ved: $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$.
   Bemerk: Hvis egenverdiene er like, finner man den andre egenvektoren ved $(A - \lambda I)\mathbf{v_2} = \mathbf{v_1}$.

3. Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og for dette systemet er origo $(x, y) = (0, 0)$

4. Anta tilhørende egenvektorer kan være $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$. Løsningen kan skrives om:

$$y = \begin{cases} C_1\mathbf{v_1}e^{\lambda_1 t} + C_2\mathbf{v_1}e^{\lambda_1 t} & \lambda_1 \neq \lambda_1 \text{ (reelle)} \\ e^{\lambda_1 t}(\mathbf{v_1}(C_1 + C_2 t) + C_2\mathbf{v_2}) & \lambda_1 = \lambda_2 \text{ (reelle)} \end{cases}$$

   For komplekse egenverdier, $\lambda = \alpha \pm i\beta$, som gir egenvektorene
   $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi \pm i\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \end{bmatrix} = \mathbf{p} \pm i\mathbf{q}$
   kan løsningen skrives på formen (ikke vektlagt i pensum):

$$\begin{aligned} y = \; & C_1 e^{\alpha t}(\mathbf{p}\cos\beta t - \mathbf{q}\sin\beta t) + \\ & C_2 e^{\alpha t}(\mathbf{p}\cos\beta t + \mathbf{q}\sin\beta t) \end{aligned}$$

5. Karakterisering av likevektpunktet

Egenverdi	Likevektspunktet
$\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 > 0$	Ustabilt (knutepunkt-ut)
$\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 < 0$	Ustabilt (sadelpunkt)
$\lambda_1 < 0$ og $\lambda_2 < 0$	Asymptotisk stabilt (knutepunkt-in)
$\lambda = \alpha \pm i\beta$	$\alpha > 0$ Ustabilt (Spiral ut- kilde)
	$\alpha < 0$ Asymptotisk stabilt (Spiral inn- sluk)
	$\alpha = 0$ stabilt (senter)

6. Den generelle løsningen til det lineære inhomogene differensialligningssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + u \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + v \end{cases}$$

der u og v er konsranter, kan skrives på formen $\mathbf{x} = \mathbf{x_h} + \mathbf{x_p}$, der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

$\mathbf{x_h}$ er løsningen til den homogene differensialligningssystemet.
$\mathbf{x_p}$ er løsningen til :

$$\begin{cases} x' = ax + by + u \\ y' = cx + dy + v \end{cases}$$

Kontrolloppgaver - Kapittel 12

Oppgave 1
Gitt $f(x,y) = x^2y - 2xy - \frac{1}{2}y^2 - \frac{3}{2}$ på R^2.

a) Bestem gradientvektoren i punktet $P(0,1)$. Lineariser f om punktet P. Sett opp ligningen til nivåkurven i dette punktet.

b) Bestem stasjonære punkt og karakteriser disse.

c) Bestem hvor rask f endrer seg langs $v = 3i + 4j$

Oppgave 2
La $\mathbf{u} = \mathbf{i} = [1, 0]$ være enhetsvektoren langs x.aksen, og la $f(x,y) = y^2e^{2x}$.

a) Finn gradienten i generelt (i punktet (x,y)) og spesielt i punktet (0, 2).

b) Hva er den retningsderiverte $(0,2)$ langs $\mathbf{i}$ og generelt i punktet (x,y).

c) La nå $f(x,y,z)$ være en vilkårlig differensierbar funksjon. Hva er den retningsderiverte i retningene gitt av hhv. $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ og $\mathbf{k}$ (enhetsvektorene langs koordinataksene).

Oppgave 3
I et legeme er temperaturen i et punkt gitt ved funksjonen $f(x,y,z) = 15e^{-x^2-2y^2-3z^2}$.
Varmeenergien strømmer i den retningen temperaturen avtar raskest.
Angi en enhetsvektor som peker i den retningen varmeenergien strømmer i punktet med koordinater $(1,-1,0)$.

Oppgave 4
En maur kryper langs en flate som kan beskrives som grafen til funksjonen gitt ved $f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2}y\cos x$ (med x–aksen pekende østover og y–aksen nordover. Ved et tidspunkt befinner mauren seg i punktet $P(\pi/6,4,3)$ og kryper i retningen gitt av $\mathbf{u} = [-\sqrt{3},1]$. Bestem retiningsderiverte i punktet P i retningen $\mathbf{u}$

Oppgave 5

a) Bestem i hviken retning fra punktet $P(2,-1)$ endrer $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ raskest?

b) Finn evetuelle lokale ekstremalpunkt til $f(x,y) = x^3 - y^2 - 3x + 2y$.

Oppgave 6
Temperaturen i et punkt x,y er gitt ved: $T(x,y) = \frac{100}{x^2+y^2+1}$

a) Hvordan se nivåkurven ut?

b) Finn $\nabla T(x, y)$ og regn ut gradienten i punktet $P(3, 4)$. Bestem i hvilken retning fra punktet P skal man reise for å få oppleve temperaturen størst og i hvilken retning skal man reise for å få oppleve minste temperaturen. Hvor stor er temperaturen da?

c) Bestem i hvilken retning fra punktet P temperaturen hverken stiger eller synker.

d) Regn ut hvor rask temperaturen endrer seg i punktet P langs vektoren $\mathbf{v} = 5\mathbf{i} + 12\mathbf{j}$.

e) Bestem retningensderiverte til T i punktet P mot punktet Q (7 , 7).

Oppgave 7
Gitt funksjonen $f(x, y) = x^2y - x^2 - y + 3$.

a) Bestem partielle deriverte av 1. og 2. orden.

b) Bestem funksjonens eventuelle stasjonære punkt og karakteriser disse.

c) Bestem eventuelle ekstremalpunkt i området der $-1 \leq x \leq 2$ og $0 \leq x \leq 2$.

d) Regn ut gradientvektoren til f i punktet $P(1, -1)$ som ligger på flaten f og sett opp tangentplanet til f i punktet P.

Fasit - Kontrolloppgaver - Kapittel 12

Oppgave 1
a) $\nabla f = [2y(x-1), x^2-2x-y]$. $\nabla f = [-2,-1]$.
Linearisering (tangentplan)
$z = f(0,1) - 2(x-0) - (y-1) = -2 - 2x - y + 1$ eller $z = -1 - 2x - y$
nivå kurven : $z = f(x,y) = f(0,1) = -2$ eller
$x^2y - 2xy - \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}$.
b) Stasjonære punkt: $\nabla f = [0,0]$ og dermed:$2y(x-1) = 0$ og $x^2 - 2x - y = 0$ gir $(0,0), (2,0)$ og $(1,-1)$.
For å karaktererisere må vi ha : $f_{xx} = 2y, f_{yy} = -1$ og $f_{xy} = 2x - 2$.
Ved å bestemme fortegnet til $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$ i disse punktene får vi:
$\Delta(0,0) = -4 < 0$ (sadel punkt)
$\Delta(2,0) = -4 < 0$ (sadel punkt) og
$\Delta(1,-1) = 2 > 0$ og $f_{xx} = -2 < 0$ (maks. punkt)
c) $\nabla f \cdot \frac{v}{|v|} = [-2,-1]\frac{1}{5}[3,4] = -2$

Oppgave 2
a) $\nabla f = [2y^2e^{2x}, 2ye^{2x}]$ og $\nabla f(0,2) = [8,4]$
b) $\nabla f \cdot \mathbf{i} = [8,4] \cdot \mathbf{i} = 8$, $\nabla f \cdot \mathbf{i} = [2y^2e^{2x}, 2ye^{2x}] \cdot \mathbf{i} = 2y^2e^{2x}$

c) $\nabla f \cdot \mathbf{i} = f_x$, $\nabla f \cdot \mathbf{j} = f_y$ og $\nabla f \cdot \mathbf{k} = f_z$.

Oppgave 3
$\nabla f(1,-1,0) = 30e^{-3}[-1,2,0]$, Siden varmen strømmer den retningen temperaturen avtar raskest blir retningen motsatt av gradienten, d.v.s. $\frac{1}{\sqrt{5}}[1,-2,0]$.

Oppgave 4
$\nabla f = \frac{\sqrt{3}}{2}[-y\sin x, \cos x]$.
$\nabla f(\pi/6,4) = \frac{\sqrt{3}}{2}[-2, \frac{\sqrt{3}}{2}]$,
$\nabla f((\pi/6,4) \cdot \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}[-2, \frac{\sqrt{3}}{2}] \cdot \frac{1}{2}[-\sqrt{3}, 1] = \frac{15}{8}$.

Oppgave 5
a) $\nabla f = [2x+y, x+2y]$. Dermed $\nabla f(2,-1) = [3,0]$.
I samme retning som gradienten er endringen størst.
b) $f(x,y) = x^3 - y^2 - 3x + 2y$.
Identifisering: $\nabla f = [3(x^2-1), -2y+2] = [0,0]$ gir $(-1,1)$ og $(1,1)$.
Karakterisering : For å karakterersere må vi ha : $f_{xx} = 6x, f_{yy} = -2$ og $f_{xy} = 0$. Ved å bestemme fortegnet til $\Delta = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$ i disse punktene får vi:

$\Delta(-1,1) = 12 > 0$ og $f_{xx} = -6 < 0$: Lokalt maskimumspunkt.
$\Delta(1,1) = -12 < 0$ gir ingen ekstremalpunkt (Sadelpunkt) .

Oppgave 6
$T(x,y) = \dfrac{100}{x^2+y^2+1}$
a) $C = \dfrac{100}{x^2+y^2+1}$ gir $x^2+y^2 = \dfrac{100}{C} - 1$ (sirkel).
b) $\nabla T = [\dfrac{-200x}{(x^2+y^2+1)^2}, \dfrac{-200y}{(x^2+y^2+1)^2}]$.
$\nabla T(3,4) = [\dfrac{-600}{676}, \dfrac{-800}{676}]$.
Største temperaturendringen er i samme retning som gradienten og største endringen er da: $|\nabla T| = \sqrt{\dfrac{600^2+800^2}{676^2}} = \dfrac{1000}{676} \simeq 1,48$.
Gradienten gir retningen funksjonen (temperaturen) øker raskest. Temperaturen avtar raskest i motsatt retning.

c) T hverken stiger eller synker i en retning normal på gradienten i retning til $u = [4,-3]$ eller $[-4,3]$: da er $\nabla T \cdot \mathbf{u} = 0$.

d) $\nabla T(3,4) \cdot \dfrac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = [\dfrac{-600}{676}, \dfrac{-800}{676}] \cdot \dfrac{1}{13}[5,12] = -\dfrac{12600}{8788} \simeq -1,43.$

e) Retningen er da $\mathbf{w} = \mathbf{PQ} = [4,3]$ og dermed
$\nabla T(3,4) \cdot \dfrac{\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|} = [\dfrac{-600}{676}, \dfrac{-800}{676}] \cdot \dfrac{1}{5}[4,3] = \dfrac{-4800}{3380} \simeq -1,42.$

Oppgave 7
Gitt funksjonen $f(x,y) = x^2y - x^2 - y + 3$.

a) $f_x = 2x(y-1)$, $f_y = x^2 - 1$, $f_{xx} = 2(y-1), f_{yy} = 0$ og $f_{xy} = 2x$.

b) Identifisering : $(1,1), (-1,1)$ som er nullpunktene til partielle første deriverte.

c) Kandidatene til ekstremalpunkt:
1) Nullpunktene til partielle deriverte av første orden: $(1,1), (-1,1)$
Ingen av disse var ekstremalpunkt. Se del b).
2) $(-1,0), (2,0) og (2,1)$ som er hjørner til definisjonsområdet ($(-1,1)$ er også et hjørne men det er også nullpunkt for partielle deriverte av første orden) $f(-1,0) = 3$
$f(2,0) = -1$
$f(2,1) = 2.$
Dermed:
$(-1,0)$ er maksimumspunkt med maksimalverdi 3 og
$(2,0)$ er minimumspunkt med minimalverdi -1.
Bestem eventuelle ekstremalpunkt i området der $-1 \leq x \leq 2$ og $0 \leq x \leq 2$.

d) $\nabla T(1,-1) = [-4, 0]$.
$f(1,-1) = 2$ og dermed tangentolanet gjennom punktet P blir da:
$z = 2 - 4(x-1) + 0(y+1)$ eller $z = -4x + 6$.