Oppfriskningskurs i matematikk
Kompendium

Notater, eksempler og oppgaver
med fasit/løsningsforslag [1]
Høsten 2018

Amir Massoud Hashemi

Innhold

[1] Sist oppdatert 7. august 2018

Ikonbeskrivelser:

Innhold

Definisjon

Eksempel

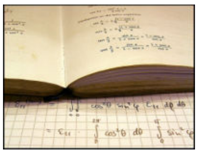
Løsning

Kommentar, hint, bemerk, husk

▲ Vanskelig oppgave

Eventuelle kommentarer eller meldinger om feil i notatene tas imot med takk: ahas@hvl.no

Forord



Å lære matematikk er som å lære et annet språk; ved første øyekast virker det uforståelig og vanskelig, men etter hvert vil du oppleve at det blir gradvis lettere. Mange begreper i matematikken er forbundet og bygger på hverandre. Å forstå innholdet i et bestemt begrep, vil dermed hjelpe deg til å forstå mange andre.

Å være usikker og frustrert i arbeidet med stoffet er en naturlig del av læringsprosessen. Husk at læring ikke bare skjer ved god innsats, men også ved intens konsentrasjon.

Dette heftet er et oppsummeringsnotat fra noen utvalgte grunnleggende emner i matematikk. Enkelte eksempler er ment som utfyllende forklaring til lærestoffet og viser hvordan lærestoffet blir benyttet til å løse konkrete oppgaver.

For hvert kapittel finner du en oppgavedel etterfulgt av fasit/løsningsforslag.

Når du skal lære et nytt emne er det ikke nok å få tak i hvordan ting skal gjøres. Det er like viktig å spørre seg *hvorfor* og prøve å forstå *hvordan* ting henger sammen. Da blir det lettere å lære. Jo bedre du forstår matematikken, desto lettere er det å bruke den til å løse aktuelle problemer i andre fagfelt.

Det er svært viktig at du leser nøye gjennom oppgavene før du prøver å løse dem. Hvis du står fast i en oppgave, les heller gjennom lærestoffet enn å se på fasit/løsningsforslag.

I kapittel 0 kan du teste og se om du innehar tilstrekkelig med basisferdigheter i matematikk.

Heftet er organisert på følgende måte:

Kapittel 0: Test deg selv (elementære regneferdigheter)

Del 1: Algebra
Kapittel 1: Grunnleggende emner
Del 2: Funksjonslære
Kapittel 2: Funksjoner, inversfunksjoner, ligninger og ulikheter
Kapittel 3: Eksponentielle funksjoner og logaritmer
Kapittel 5: Grenseverdi og kontinuitet
Kapittel 6: Derivasjon, funksjonsdrøfting og en del anvendelser
Del 3:
Kapittel 4: Trigonometri
Kapittel 7: Integrasjon og en del anvendelser

Amir Massoud Hashemi
August 2018

Dette heftet ble laget for Matematisk institutt ved UiB og har blitt oppdatert siste årene

Kapittel 0 Test deg selv

Før du begynner å lese notatene og ta forkurset, kan du teste deg selv i grunnleggende emner.

Oppgaver – Selvtest

Oppgavene skal løses uten bruk av kalkulator.

Oppgave 0.1

Regn ut.

a) $4+3\cdot 2^4+2\left(4^2-3\right)$ **b)** $3^2\left(4+2\right)-4\left(4+2^2\right)$ **c)** $\left(-2\right)^5\cdot\left(5^2-4^2-3^2\right)+13\cdot\left(-1\right)^{13}$

Oppgave 0.2

Regn ut.

a) $\frac{25}{16}\cdot\frac{32}{50}$ **b)** $\frac{3}{7}\cdot\frac{28}{15}$ **c)** $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{6}}$ **d)** $\frac{4}{7}:6$

Oppgave 0.3

Regn ut.

a) $1+\frac{5}{12}-\frac{7}{18}$ **b)** $\left(2+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{2}{5}$ **c)** $\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right):\frac{22}{5}$

Oppgave 0.4

Regn ut.

a) $\frac{\frac{56}{15}}{\frac{64}{21}}$ **b)** $\frac{1+\frac{1}{2}}{2-\frac{1}{3}}$ **c)** $\frac{\frac{1}{3}-\frac{5}{6}}{\frac{2}{3}+\frac{5}{12}}$

Oppgave 0.5

Regn ut.

a) $\frac{\frac{x}{2}}{\frac{2x}{5}}$ **b)** $\frac{\frac{x}{3}}{\frac{5}{9}}$ **c)** $\frac{\frac{a}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{a}{6}-\frac{3}{4}}$ **d)** $\frac{\frac{3}{x}+\frac{3}{2}}{3+\frac{3}{2x}}$

Oppgave 0.6

Multipliser og trekk sammen.

a) $ab\left(1+2b\right)-2a\left(b^2-b\right)$ **b)** $\left(2x+1\right)\left(2x+1\right)-\left(2x+1\right)\left(2x-1\right)$

c) $\left(a-3b\right)^2-\left(a+3b\right)\left(a-3b\right)$ **d)** $\left(\frac{1}{2}a-b\right)\left(\frac{1}{2}a+b\right)-\frac{1}{2}(2b-a)^2+3b(b-\frac{2}{3}a+\frac{1}{12b}a^2)$

Oppgave 0.7

Skriv så enkelt som mulig.

a) $\dfrac{3a^2-6ab+3b^2}{6(a-b)}$ **b)** $\dfrac{a^2-6ab+9b^2}{a^2-9b^2}$

Oppgave 0.8

Bruk kvadratsetningene og regn ut.

a) $(x+5)^2-(x+5)(x-5)$ **b)** $(x-3)^2-(x+3)^2$

c) $(3a+2)(2+3a)$ **d)** $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{5}-1\right)^2$

Oppgave 0.9

Faktoriser uttrykkene.

a) $4x^2+2x$ **b)** x^2-81 **c)** $2t^2-8$ **d)** x^2+2x+1

Oppgave 0.10

Faktoriser uttrykkene ved hjelp av nullpunktene.

a) x^2-4x+3 **b)** x^2-x-2 **c)** $a^2+2a-15$ **d)** $y^2+11y+28$

Oppgave 0.11

Forkort brøkene.

a) $\dfrac{x^2-1}{2x+2}$ **b)** $\dfrac{3x^2-12}{6x-12}$ **c)** $\dfrac{x^3-x^2}{x^2-1}$ **d)** $\dfrac{2x^2y-4xy^2}{x^3-4xy^2}$

Fasit – Selvtest

0.1

a) 78 **b)** 22 **c)** -13

0.2

a) 1 **b)** $\frac{4}{5}$ **c)** $\frac{2}{5}$ **d)** $\frac{2}{21}$

0.3

a) $\frac{37}{36}$ **b)** 1 **c)** $\frac{1}{6}$

0.4

a) $\frac{49}{40}$ **b)** $\frac{9}{10}$ **c)** $-\frac{6}{13}$

0.5

a) $\frac{5}{4}$ **b)** $\frac{3x}{5}$ **c)** $\frac{6(a-1)}{2a-9}$ **d)** $\frac{2+x}{2x+1}$

0.6

a) $3ab$ **b)** $4x+2$ **c)** $6b(3b-a)$ **d)** 0

0.7

a) $$\frac{3a^2-6ab+3b^2}{6(a-b)}=\frac{\cancel{3}(a^2-2ab+b^2)}{2\cdot\cancel{3}(a-b)}=\frac{\cancel{(a-b)}(a-b)}{2\cancel{(a-b)}}=\underline{\underline{\frac{a-b}{2}}}$$

b) $$\frac{a^2-6ab+9b^2}{a^2-9b^2}=\frac{(a-3b)^{\cancel{2}}}{\cancel{(a-3b)}(a+3b)}=\underline{\underline{\frac{a-3b}{a+3b}}}$$

0.8

a) $10(x+5)$ **b)** $-12x$ **c)** $9a^2+12a+4$ **d)** $2\sqrt{5}-3$

0.9

a) $2x(2x+1)$ **b)** $(x-9)(x+9)$ **c)** $2(t-2)(t+2)$ **d)** $(x+1)^2$

0.10

a) $(x-1)(x-3)$ **b)** $(x+1)(x-2)$ **c)** $(a-3)(a+5)$ **d)** $(y+4)(y+7)$

0.11

a) $\frac{x-1}{2}$ **b)** $\frac{x+2}{2}$ **c)** $\frac{x^2}{x+1}$ **d)** $\frac{2y}{x+2y}$

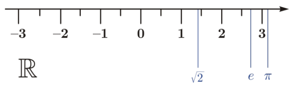
Kapittel 1 Grunnleggende emner

Dette kapittelet er en repetisjon av grunnleggende konsepter og prinsipper. Vi oppsummerer emner som:

- Tallmengder, intervall
- Bokstavregning og brøkregning
- Regler for potensregning
- Absoluttverdi
- Geometriske og aritmetiske rekker

1.1 Talllinjen og reelle tall

1. **Utgangspunkt** (O, origo, begynnelsespunkt, nullpunkt) (origo (latin) betyr begynnelse)
2. **Lengdeenhet** (E)
3. **Positiv retning**, vises med en pil



1.2 Mengder og tallmengder

En mengde inneholder visse objekter, kalt elementer. Elementene kan i prinsippet være hva som helst, for eksempel tall, personer, biler eller andre mengder.

$x \in M$: x er et element i mengden M
$x \notin M$: et element x er ikke i mengden M
En mengde kan være tom. Den tomme mengden blir betegnet med Ø.

Kjente tallmengder:

- Mengden av alle naturlige tall: $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$
- Mengden av alle hele tall: $\mathbf{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$
- Mengden av alle rasjonale tall: $\mathbf{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \text{ og } q \text{ er hele tall }, q \neq 0\}$
- Mengden av alle reelle tall: **R** inneholder alle tall på reelle tallinjen

- Et reelt tall som ikke er rasjonalt kalles *irrasjonalt*, for eksempel: $\sqrt{2}$

Eksempel 1.1

Noen rasjonale tall: $0{,}18$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{7}$, 5

Noen irrasjonale tall: $\sqrt{2}$, π

1.3 Intervaller

Intervaller er deler av tallinjen. Et intervall kan være lukket eller åpent:

- Intervallet $0 \le x \le 3$ er lukket og kan skrives som: $[0\,,3]$
- Intervallet $0 < x < 3$ er åpent og kan skrives som: $<0\,,3>$
- Intervallet $x \ge 3$ er halvt lukket/halvåpent og kan skrives som: $[3,\,,\rightarrow>$ eller $[3\,,\infty>$

Åpent intervall	Intervallnotasjon	Grafisk framstilling
$\{x \mid a < x\}$	(a, ∞)	
$\{x \mid a < x < b\}$	$<a,b>$	
$\{x \mid x < a\}$	$<-\infty,a>$	
$\{x \mid x \text{ is a real } \#\}$	$<-\infty,\infty>$	
Halvt åpent intervall	Intervallnotasjon	Grafisk framstilling
$\{x \mid a \le x\}$	$[a,\infty>$	
$\{x \mid a \le x < b\}$	$[a,b>$	
$\{x \mid x \le a\}$	$<-\infty,a]$	
Lukket intervall	Intervallnotasjon	Grafisk framstilling
$\{x \mid a \le x \le b\}$	$[a, b]$	

1.4 Regnerekkefølge

Kunnskaper om sammenheng mellom regneoperasjonene er svært viktig i algebra.
I sammensatte uttrykk kan man regne ut uttrykket i følgende rekkefølge:

1. Regn ut alle parenteser
2. Regn ut potenser
3. Multipliser eller divider
4. Legg sammen eller trekk fra

Eksempel 1.2

Regn ut uten kalkulator:

$$12\cdot 5-3\cdot 2^2-7(5-3)^3+2(-3)^2+(-2)^3$$

Parenteser og potenser: $12\cdot 5-3\cdot 4-7\cdot 8+2\cdot 9-8$

Multipliser: $60-12-56+18-8$

Legg sammen: $60-12-56+18-8=\underline{\underline{2}}$

1.5 Bokstavregning og brøkregning

Algebra er for mange det samme som bokstavregning. I matte brukes bokstaver spesielt i formler, ligninger og ulikheter, identiteter og funksjonsuttrykk.

$$a+2a=3a \qquad a\cdot a^2=a^3$$

- **Et ledd**

$2x^3$ er *et ledd*, der 2 er *koeffisient,* x er *variabel o*g 3 er *eksponent*.

To ledd atskilles fra hverandre med + eller – : $2x^3+3x$

- **En faktor**

$x(x+2)$ består av 2 faktorer.

To *faktorer* atskilles fra hverandre med gangetegn: $x\,y$.

Regneregler

	Addisjon	**Multiplikasjon**
Kommutativ lov	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Assosiativ lov	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Distributiv lov	$a\cdot(b+c)=ab+ac$	
Motsatte og inverse tall	$a+(-a)=-a+a=0$	$a\cdot\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)\cdot a$ der $a\neq 0$

Tallet 0 og 1:

$$a+0=0+a=a \qquad a\cdot 1=1\cdot a=a$$

1.6 Parentesregler

$$a\left(b+c\right)=ab+ac \qquad \left(a+b\right)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

1.7 Brøkregning og brudden brøk[2]

- $\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}$ Husk: $\dfrac{a}{b+c}\neq\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}$
- $\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{c}{d}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$ Husk: $a\cdot\dfrac{b}{c}=\dfrac{a\cdot b}{c}$
- $a:\dfrac{c}{d}=a\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{a\cdot d}{c}$ Husk: $\dfrac{a}{\frac{c}{d}}=a:\dfrac{c}{d}=a\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{a\cdot d}{c}$
- $\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$ Husk: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\dfrac{a}{b}:\dfrac{c}{d}=\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}=\dfrac{ad}{bc}$

1.8 Faktorisering

Faktorisering er en prosess der man deler opp et matematisk uttrykk som for eksempel en ligning eller et tall i mindre enheter (faktorer) som kan ganges sammen for å få det opprinnelige uttrykket.

After all these years, Bob's "A" in algebra finally pays off.

Eksempel 1: $x+3x^2+5x-x^2=2x^2+6x=2x(x+3)$

Eksempel 2: $4a^2b-12ab^2+8b^3=4b\left(a^2-3ab+2b^2\right)$

1.9 Fellesnevner

- **Fellesnevner**

  Fellesnevner er det minste tallet som er delelig med alle nevnerne[3].

  Eksempel 1: $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{2}{3a}=\dfrac{1\cdot 3}{2a\cdot 3}+\dfrac{2\cdot 2}{3a\cdot 2}=\dfrac{3+4}{6a}=\underline{\underline{\dfrac{7}{6a}}}$

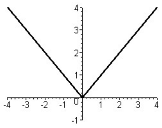
  Eksempel 2: $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{2}{x}=\dfrac{\left(x-1\right)x}{\left(x+1\right)x}+\dfrac{2\left(x+1\right)}{x(x+1)}=\dfrac{x^2-x+2x+2}{x\left(x+1\right)}=\underline{\underline{\dfrac{x^2+x+2}{x\left(x+1\right)}}}$

[2] En brudden brøk består av en brøk i telleren, en brøk i nevneren og en hovedbrøkstrek mellom dem.
[3] For mer info kan du lese her: http://math.uib.no/forkurs/Primtall.pdf

1.10 Absoluttverdi

Absoluttverdien eller tallverdien til et reelt tall er den numeriske verdien til tallet uten hensyn til fortegnet. Den geometriske tolkningen av absoluttverdi kan være avstand på tallinjen.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



Husk: $\sqrt{x^2} = |x|$

Grafen til $y = |x|$:

Absoluttverdien av x kan tolkes som avstanden fra 0 til x på tallinjen.
Tilsvarende vil $|x-y|$ bli avstanden mellom x og y på tallinjen. Dermed har vi at de x som tilfredsstiller ligningen $|x-1| < 2$ er alle tall x slik $-1 < x < 3$.

Noen regneregler som gjelder:

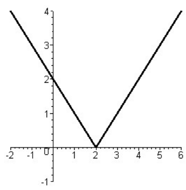
$$\begin{cases} |ab| = |a||b| \\ \dfrac{|a|}{|b|} = \dfrac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0) \end{cases}$$

$|x| = a \Leftrightarrow x = \pm a$
$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
$|x| > a \Leftrightarrow x < -a \ \cup \ x > a$

Det kan vises:
$|a \pm b| \leq |a| + |b|$
$\big||a| - |b|\big| < |a+b|$

Eksempel 1.3

a) Beregn: $|3 - |-7||$
b) Løs ligningen $|x-2| = 3$
c) Tegn grafen til $y = |x-2|$



a) $|3 - |-7|| = |3-7| = 4$
b) $|x-2| = 3$
c) $y = |x-2| = \begin{cases} x-2 & x \geq 2 \\ -(x-2) & x < 2 \end{cases}$. Grafen er vist her:

Eksempel 1.4

Løs ligningene og ulikheten: **a)** $|x-5| = 3$ **b)** $|x-5| < 3$ **c)** $|x| = x$

a) $x - 5 = \pm 3 \Rightarrow \underline{\underline{x = 2 \vee x = 8}}$

b) $|x-5| < 3 \Rightarrow -3 < x - 5 < 3 \Rightarrow \ \underline{\underline{2 < x < 8}}$

c) $\begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow x = x \ \Rightarrow x \in R \\ x < 0 \Rightarrow x = -x \Rightarrow x = 0 \end{cases} \Rightarrow x \geq 0$ eller $\underline{\underline{x = \{x | x \in R, x \geq 0\}}}$

1.11 Potenser med heltallige eksponenter

a^n kalles *potens* (potensledd) og er definert som: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots \cdot a}_{n \text{ ganger}}$

der a er grunntall og n er et naturlig tall og kalles eksponent.

Hvis $a \neq 0$, kan vi skrive $a^0 = 1$ og $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Regneregler

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = (a^m)^n$	$\sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$

Husk:

$a^0 = 1$	$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Kvadratrot skrives slik: $\sqrt{}$ og $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. n'te rot skrives $\sqrt[n]{}$ og kan noteres: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Eksempel 1.5

Skriv så enkelt som mulig: **a)** $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)^2$ **b)** $\dfrac{x^3}{\sqrt{x}}$

a) $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x}}\right)^2 = \dfrac{x^2}{x} = x$

b) $\dfrac{x^3}{\sqrt{x}} = x^{(3-\frac{1}{2})} = x^{\frac{5}{2}} = x^{\frac{4+1}{2}} = x^2 x^{\frac{1}{2}} = x^2\sqrt{x}$

1.12 Kvadratsetningene

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	(1. og 2. kvadratsetning)
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	(3. kvadratsetning)

1.13 Geometrisk rekke

Kjennetegnet til en geometrisk rekke er at forholdet mellom to påfølgende ledd er konstant.

$\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = k$ (kvotient)

Summen av de n første leddene i rekken er: S = $a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \cdots + a_1 k^{n-1}$

og kan utledes som $S = a_1 \dfrac{1-k^n}{1-k}$**,** husk at *n* er *antall ledd* i rekken.

Geometrisk rekke, ledd *n*	$a_n = a_1 k^{n-1}$	*k* er rekkens kvotient
Summen av de *n* første leddene i en geometrisk rekke	$S = a_1 \dfrac{1-k^n}{1-k}$	Gjelder for k $\neq 1$. Hvis $k = 1$ er, $S = na_1$
Summen av en uendelig geometrisk rekke (konvergent)	$s = \dfrac{a_1}{1-k}$	Gjelder for $-1 < k < 1$ S = 0 når $a_1 = 0$
Rentesrenteformelen	$K_n = K_0 (1 + \dfrac{p}{100})^n$	Verdien $\underline{K}_n$ om *n* år av et beløp K_0 i dag

Eksempel 1.6

Ved den første injeksjonen gir dosen 5 enheter.
Pasienten skal få 20 injeksjoner med en ukes mellomrom.
a) Hvor mye skal injeksjonen økes slik at den siste dosen er 100 000 enheter?
b) Hvor mange enheter mottar pasienten i løpet av de 20 injeksjonene?

a) $K_n = K_0 (1 + \dfrac{p}{100})^{n-1}$

$$100,000 = 5(1 + \frac{p}{100})^{19} \Rightarrow 1 + \frac{p}{100} = (20,000)^{1/19} \approx 1,684 \Rightarrow p \approx 0,684 \quad \text{eller} \quad 68,4\,\%.$$

b) Vi ønsker å bestemme summen til 30 ledd i en geometrisk rekke:

$$S = 5 + 5\,(1,41) + \cdots + 5(1,41)^2 + \cdots + 5(1,41)^{19} = 5 \cdot \frac{1-(1,41)^{20}}{1-1,41} \approx \underline{\underline{1,175 \cdot 10^4}} \text{ enheter}$$

1.13.1 Summetegnet $\sum$

Summetegnet kan hjelpe oss til å omskrive en sum som følger en bestemt regel:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Eksempel 1.7

Skriv summen $3(2)^4 + 3(2)^5 + \cdots + 3(2)^{10}$ ved hjelp av summetegnet. Regn ut summen.

$$3(2)^4 + 3(2)^5 + \cdots + 3(2)^{10} = \sum_{i=4}^{10} 3(2)^i \quad \text{eller} \quad 3(2)^4 + 3(2)^5 + \cdots + 3(2)^{10} = 3\sum_{i=1}^{7} (2)^{i+3}$$

Summen er da lik: $3(2)^4 + 3(2)^5 + \cdots + 3(2)^{10} = 3(2)^4 \dfrac{1-2^7}{1-2} = \underline{\underline{6096}}$

Bemerk: $a_1 + a_1 k + a_1 k^2 + \cdots + a_1 k^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} a_i (k)^{i-1} = \dfrac{a_1(1-k^n)}{1-k}$

Eksempel 1.8

Bestem summen til den geometriske rekken:

$$5+10+20+\cdots+640$$

For å bestemme n (antall ledd i rekken) kan vi benytte: $\dfrac{a_n}{a_1}=k^{n-1}$

$\dfrac{640}{5}=128=2^{n-1}\Rightarrow 2^{n-1}=2^7\Rightarrow n=8$

Summen er da lik: $5+10+20+\cdots+620=5\dfrac{1-2^8}{1-2}=\underline{\underline{1275}}$

Bemerk: $a_1\ +\ a_1k\ +\ a_1k^2+\cdots+a_1k^{n-1}\ =\sum_{i=1}^{n}a_i(k)^{i-1}=\dfrac{a_1(1-k^n)}{1-k}$

1.14 Aritmetisk rekke

Kjennetegnet til en aritmetisk rekke er at *differansen* mellom alle to påfølgende ledd er konstant. $a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=d$

Summen av de n første leddene i en aritmetisk rekke er gitt ved:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+(a_1+(n-1)d)=\frac{n}{2}(a_1+a_n)=\frac{n}{2}(2a_1+(n-1)d)$$

Eksempel 1.9

Bestem summen til den aritmetiske rekken:

$$5+9+13+\cdots+49$$

Differansen d kan bestemmes: $d=9-5=13-9=4$

For å bestemme n (antall ledd i rekken) kan vi benytte: $a_n-a_1=(n-1)d$

$4(n-1)=49-5\Rightarrow n-1=11\Rightarrow n=12$

Summen er da lik: $5+9+13+\cdots+49=\dfrac{12}{2}(5+49)=\underline{\underline{324}}$

Bemerk: $\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+(a_1+(n-1)d)=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$

Oppgaver – Kapittel 1

Oppgavene skal løses uten bruk av kalkulator.

Oppgave 1.1

Regn ut.

a) $3\cdot 2^4 - 3\left(4^2-4\right)$ **b)** $3^2\left(4+2\right)-4\left(2^2+2\right)$ **c)** $\left(-3\right)^5\cdot\left(5^2-4^2-3^2\right)+12\cdot\left(-1\right)^{19}$

Oppgave 1.2

Regn ut.

a) $\frac{36}{8}\cdot\frac{32}{144}$ **b)** $\frac{3}{7}\cdot\frac{35}{30}$ **c)** $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{15}}$ **d)** $\frac{2}{3}:6$

Oppgave 1.3

Regn ut.

a) $\frac{2}{x}-\frac{1}{2x}-\frac{4}{3x}$ **b)** $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x^2-1}$ **c)** $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x}\right):\frac{1}{x}$

Oppgave 1.4

Regn ut.

a) $\frac{\frac{a}{15}}{\frac{a}{3}}$ **b)** $\frac{b+\frac{b}{2}}{2b-\frac{b}{3}}$ **c)** $\frac{\frac{a}{2}-\frac{a}{5}}{\frac{a}{5}+\frac{a}{2}}$

Oppgave 1.5

Regn ut.

a) $\frac{x-1}{1-\sqrt{x}}$ **b)** $\frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}}$ **c)** $\frac{\frac{a}{2x-1}-\frac{a}{2x+1}}{\frac{1}{4x^2-1}}$

Oppgave 1.6

Multipliser og trekk sammen.

a) $a\left(1+b^2\right)-2a\left(b^2-b\right)-ab(2-b)$ **b)** $\left(3x+2\right)\left(3x+2\right)-\left(3x+2\right)\left(3x-2\right)$

c) $\left(a-2b\right)^2-\left(a+2b\right)\left(a-2b\right)$ **d)** $\left(2+\sqrt{x}\right)\left(2-\sqrt{x}\right)-\left(2-\sqrt{x}\right)^2-4\sqrt{x}$

Oppgave 1.7

Skriv så enkelt som mulig:

a) $\dfrac{4a^2 - 4ab + b^2}{(2a - b)}$ **b)** $\dfrac{a^2 - 4ab + 4b^2}{a^2 - 4b^2}$

Oppgave 1.8

Bruk kvadratsetningene og regn ut.

a) $(x+3)^2 - (x+3)(x-3)$ **b)** $(x-a)^2 - (x+a)^2$

c) $(3a+2)(2-3a) - (3a-2)^2$ **d)** $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) - \left(\sqrt{2}-1\right)^2$

Oppgave 1.9

Faktoriser uttrykkene.

a) $9x^2 + 3x$ **b)** $4x^2 - 49$ **c)** $4t^2 - 9$ **d)** $x^2 + 6ax + 9a^2$

Oppgave 1.10

Faktoriser uttrykkene ved hjelp av nullpunktene.

a) $x^2 - 5x + 4$ **b)** $x^2 - 2x - 3$ **c)** $a^2 - a - 12$ **d)** $b^2 + b - 6$

Oppgave 1.11

Forkort brøkene.

a) $\dfrac{x^2 - 9}{2x + 6}$ **b)** $\dfrac{x^2 - 36}{4x - 24}$ **c)** $\dfrac{x - x\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$ **d)** $\dfrac{3x^2 y - 9xy^2}{x^3 - 9xy^2}$

Oppgave 1.12

Skriv så enkelt som mulig ($a > 0$) :

a) $\dfrac{\sqrt{a^3 \cdot a^4}}{(a^2)^3}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}\,\sqrt{a}}$ **c)** $\dfrac{a \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot}{\sqrt[3]{a^4}}$ **d)** $\dfrac{\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{a\,\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^4}}$

Oppgave 1.13

Bestem summene:

a) $1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{9} + \dfrac{8}{27} + \cdots$

b) $1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + \cdots$ der $x > 1$

Oppgave 1.14

a) Løs ligningen: $\sqrt{(x-1)^2} = 2$.

b) Tegn grafen til $y = |x - 1|$

Fasit – Kapittel 1

1.1 **a)** 12 **b)** 30 **c)** -12

1.2 **a)** 1 **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{5}{7}$ **d)** $\frac{1}{9}$

1.3

a) $\frac{6\cdot 2}{6\cdot x}-\frac{3\cdot 1}{3\cdot 2x}-\frac{2\cdot 4}{2\cdot 3x}=\frac{1}{6x}$ **b)** $\frac{1}{x^2-1}$ **c)** $\sqrt{x}+1$

1.4 **a)** $\frac{1}{5}$ **b)** $\frac{b+\frac{b}{2}}{2b-\frac{b}{3}}=\frac{\frac{3b}{2}}{\frac{5b}{3}}=\frac{9}{10}$ **c)** $\frac{3}{7}$

1.5 **a)** $-(1+\sqrt{x})$ **b)** $x+\sqrt{2}$ **c)** $2a$

1.6 **a)** a **b)** $4\left(3x+2\right)$ **c)** $-4b(a-2b)$ **d)** $-2x$

1.7 **a)** $2\mathrm{a}-\mathrm{b}$ **b)** $\frac{\mathrm{a}-2\mathrm{b}}{\mathrm{a}+2\mathrm{b}}$

1.8 **a)** $6\left(x+3\right)$ **b)** $-4ax$ **c)** $-6a(3a-2)$ **d)** $2(1-\sqrt{2})$

1.9 **a)** $3x(3x+1)$ **b)** $(2x-7)(2x+7)$ **c)** $(2t-3)(2t+3)$ **d)** $(x+3a)^2$

1.10 **a)** $(x-1)(x-4)$ **b)** $(x-3)(x+1)$ **c)** $(a-4)(a+3)$ **d)** $(b-2)(b+3)$

1.11 **a)** $\frac{x-3}{2}$ **b)** $\frac{x+6}{4}$ **c)** x **d)** $\frac{3x^2y-9xy^2}{x^3-9xy^2}=\frac{3xy(x-3y)}{x(x-3y)(x+3y)}=\frac{3y}{x+3y}$

1.12

a) $\frac{\sqrt{a^3\cdot a^4}}{(a^2)^3}=\frac{a^{\frac{7}{2}}}{a^6}=a^{-\frac{5}{2}}=\frac{1}{a^{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{a^2\sqrt{a}}$

b) $\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt{a}}=a^{\frac{3}{2}-(\frac{2}{3}+\frac{1}{2})}=a^{\frac{9-4-3}{6}}=a^{\frac{2}{6}}=\sqrt[3]{a}$

c) $\frac{a\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot}{\sqrt[3]{a^4}}=a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{4}{3}}=\sqrt{a}$

d) $\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[6]{a}\cdot\sqrt[4]{a}}{a\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3\cdot a^4}}}=a^{(\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4})-(1+\frac{7}{12})}=a^0=1$

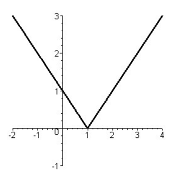
1.13 **a)** $S=1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\cdots$ $\quad S=a_1\frac{1-k^n}{1-k}=\lim_{n\to\infty}1\frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}}=\underline{\underline{3}}$

b) $1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots$ **der** $x>1$ $\quad S=a_1\frac{1-k^n}{1-k}=\lim_{n\to\infty}1\frac{1-(\frac{1}{x})^n}{1-\frac{1}{x}}=\underline{\underline{\frac{x}{x-1}}}$ der $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{x})^n\overset{x>1}{=}0$

1.14

a) $\left|x-1\right|=2\Rightarrow x-1=\pm 2\Rightarrow \underline{\underline{x=3\vee x=-1}}$

b) $y=|x-1|=\begin{cases}x-1 & x>1\\ 1-x & x<1\end{cases}$



Kapittel 2 Funksjoner, ligninger og ulikheter

Her skal vi ta for oss sentrale begreper knyttet til funksjoner og deretter studere ligninger og ulikheter.

2.1 Hva er en funksjon?

En funksjon *f* er en regel som tilordner ethvert element, x, fra en mengde kalt *definisjonsmengde*, til et entydig bestemt element, y, i en mengde kalt *verdimengde*:

$$y = f(x) \text{ der } x \in D_f \quad \text{og} \quad y \in V_f$$

x og y kalles henholdsvis *uavhengig* variabel og *avhengig* variabel.

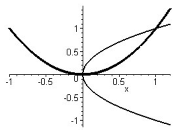
Kravet for at en relasjon $y = f(x)$ er en funksjon er:
For enhver x i definisjonsmengden finnes *én og bare én y* i verdimengden:

$$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Vertikallinjetesten: En linje parallell med y-aksen skjærer funksjonskurven høyst i ett punkt.

Eksempel 2.1

$y = x^2$ er en funksjon, mens $y^2 = x$ ikke tilfredsstiller definisjonen til en funksjon (grafen til $y = x^2$ som er vist litt tykkere har bare et skjæringspunkt med en vertikal linje, mens $y^2 = x$ har to).

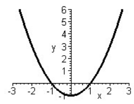


2.2 Grafen til en funksjon

La f være en funksjon. Mengden av alle tallpar $(x, f(x))$ som vi får ved å la x gjennomløpe definisjonsmengden til f, kalles grafen til funksjonen $y = f(x)$.

Eksempel 2.2

Grafen til $y = f(x) = x^2 - 1$ er vist her:



Som vi ser, er denne relasjonen en funksjon.

2.3 Noen viktige begrep

- **Monotoni**

(i) En funksjon *f* er *voksende* dersom: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

(ii) En funksjon *f* er *strengt voksende* dersom: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

(iii) En funksjon *f* er *avtagende* dersom: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

(iv) En funksjon *f* er *strengt avtagende* dersom: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

- **Kontinuitet**

En funksjon $y = f(x)$ er kontinuerlig dersom grafen er sammenhengende.
I kapittel 5 skal vi studere kontinuitetsbegrepet nærmere.

- **En entydig funksjon**

For enhver *y* i verdimengden finnes *én og bare én x* i definisjonsmengden. Vi kan bruke den såkalte horisontallinjetesten til å studere entydighet.

- **Horisontallinjetesten**

En linje parallell med *x*-aksen skjærer funksjonskurven *høyst* i ett punkt.

- **Sammensatte funksjoner**

For eksempel: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ kan anses som $y = \sqrt{g(x)}$ der $g(x) = x^2 + 1$.

- **Oppdelte funksjoner**

En funksjon som er uttrykt ved hjelp av flere funksjonsuttrykk i forskjellige intervaller.

For eksempel: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$

- **Odde og jamne funksjoner, og symmetriegenskaper** (er foreløpig ikke pensum)

2.4 Noen funksjoner

Polynomfunksjoner: $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ (polynom av n'te grad)
(for eksempel førstegrads- og andregradsfunksjoner)

Rasjonale funksjoner: $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$), der *f* og *g* er polynomfunksjoner

Eksponentialfunksjoner: $y = a^x$, $a > 0$

Logaritmefunksjoner: $y = \log_a x$, der $x > 0$, $a > 0$.
(for eksempel briggske logaritmer, $y = \log x$ og naturlige logaritmer, $y = \ln x$)

Trigonometriske funksjoner: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = c + a\sin(\omega x - \varphi)$, …

2.5 Førstegradsfunksjoner $f(x) = ax + b$

En førstegradsfunksjon er en funksjon der funksjonsuttrykket er av første grad og kan skrives på formen: $y = ax + b$, der *a* kalles stigningstall og *b* er konstantleddet.

- Ettpunktsformelen: $y - y_0 = a(x - x_0)$

(en rett linje med stigningstall *a* som går gjennom punktet $(x_0\ ,\ y_0)$)

- Topunktsformelen: $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

(en rett linje gjennom punktene $(x_0\ ,\ y_0)$ og $(x_1\ ,\ y_1)$ der stigningstallet da blir $a = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$)

Grafen til $y = ax + b$, der *a* kalles *stigningstall* og *b* konstant ledd, er en rett linje.

$a > 0 \Rightarrow$ funksjonen er strengt voksende.

$a < 0 \Rightarrow$ funksjonen er strengt avtagende.

$a = 0 \Rightarrow$ funksjonen er konstant: $y = b$.

2.6 Ligninger

En ligning består av to matematiske uttrykk som er satt lik hverandre, der uttrykkene inneholder minst én ukjent. Den ukjente betegnes ofte x .
Når ett ledd (i en ligning) flyttes fra en side av likhetstegnet til den andre, må vi skifte fortegn $(+,-)$ på leddet.

En ligning som alltid er oppfylt, uansett valg av den ukjente, kalles en *identitet*. For eksempel $(x+1)\ (x-1) = x^2 - 1$.

2.7 Førstegradsligninger

Når vi skal løse førstegradsligninger må vi prøve å samle x-ene på en side og tallene på den andre siden. Men for å få til det må vi legge til eller trekke fra det samme tallet på begge sider, eller multiplisere eller dividere alle ledd på begge sider med det samme tallet.

Eksempel 2.3

Løs ligningene:

a) $8x + 7 = 88 - x$ **b)** $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 11 - x$ **c)** $1 - \frac{1}{2}(3 - x) + \frac{2x}{5} = 4$

a) $8x+7=88-x$ $8x+x=88-7$ $9x=81$ $x=\frac{81}{9}=\underline{\underline{9}}$	**b)** $6\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=11-x\right)$ $3x+2x=66-6x$ $11x=66$ $\underline{\underline{x=6}}$	**c)** $10\left(1-\frac{1}{2}(3-x)+\frac{2x}{5}=4\right)$ $10-5(3-x)+2(2x)=40$ $10-15+5x+4x=40$ $9x=45 \Rightarrow \underline{\underline{x=5}}$

2.8 Andregradsligninger $ax^2 + bx + c = 0$

Vi har å gjøre med en andregradsligning når en ligning har en ukjent som er opphøyd i 2. Den skrives ofte på denne formen: $ax^2 + bx + c = 0$, der a , b og c er reelle tall og $a \neq 0$.

- Løsningene til andregradsligningen: $ax^2 + bx + c = 0$ kan skrives som:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad \begin{cases} b^2 - 4ac > 0 & \text{2 foskjellige reelle løsninger} \\ b^2 - 4ac = 0 & \text{dobbel løsning} \\ b^2 - 4ac < 0 & \text{ingen reell løsninger} \end{cases}$$

- Hvis $b = 0$, kan ligningen $ax^2 + c = 0$ ha løsningene $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$
- Hvis $c = 0$, kan ligningen $ax^2 + bx = 0$ ha løsningene $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{b}{a}$
- En andregradsfunksjon $f(x) = ax^2 + bx + c$ som har nullpunkt, kan faktoriseres med dens nullpunkt(er):

  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$,

  der x_1 og x_2 kan bestemmes ved: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Det er hovedsakelig tre tilfeller av ligningene:

Eksempel

Ingen konstantledd $c = 0$	$ax^2 + bx = 0$ $x \cdot (ax + b) = 0$ $x = 0 \;\; eller \;\; ax + b = 0$ $\underline{\underline{x = 0 \;\; eller \;\; x = \frac{b}{a}}}$	$2x^2 - 4x = 0$ $x \cdot (2x - 4) = 0$ $x = 0 \;\; eller \;\; 2x - 4 = 0$ $\underline{\underline{x = 0 \;\; eller \;\; x = 2}}$
Ingen førstegradsledd $b = 0$	$ax^2 + c = 0$ $ax^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $\underline{\underline{x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}}}$	$4x^2 - 9 = 0$ $4x^2 = 9$ $x^2 = \frac{9}{4}$ $x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$ $\underline{\underline{x = \pm\frac{3}{2}}}$
Generell	$ax^2 + bx + c = 0$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $b^2 - 4ac > 0$: 2 reelle løsninger $b^2 - 4ac = 0$: en dobbel løsning	$x^2 + x - 6 = 0$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$ $x = \frac{-1 \pm 5}{2}$ $\underline{\underline{x = 2 \quad eller \quad x = -3}}$ $x^2 + 4x + 4 = 0$ $x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1}$ $x = \frac{-4 \pm 0}{2}$ $\underline{\underline{x = -2}}$

Eksempel 2.4

Løs følgende andregradsligning $4x^2 + 10x - 24 = 0$

SVAR: Bruker abc-formelen. Her er a = 4, b = 10 og c = -24.

$$x_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-24)}}{2 \cdot 4} = \frac{-10 \pm \sqrt{484}}{8} = \frac{-10 \pm 22}{8}$$

Dette gir de to løsningene $\underline{x_1 = -4 \;\text{ og }\; x_2 = \frac{3}{2}}$

Eksempel 2.5

Løs ligningene:

a) $x^2 + 3x = 4$ **b)** $x^2 = 5x$ **c)** $x^2 - 5 = 0$

a)	b)	c)
$x^2+3x-4=0$ $x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-4)}}{2}$ $x=\frac{-3\pm 5}{2}$ $\underline{\underline{x=1 \vee x=-4}}$	$x^2 = 5x$ $x(x-5)=0$ $\underline{\underline{x=0 \vee x=5}}$	$x^2-5=0$ $x^2=5$ $\underline{\underline{x=\pm\sqrt{5}}}$

2.9 Andregradsfunksjoner $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Dersom $a > 0$, smiler grafen, mens grafen er sur når $a < 0$.
- Skjæringspunkt med y-aksen er ($x = 0$, $y = c$).
- Nullpunktene til grafen (skjæringspunkt med *x*-aksen) er $(x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, y = 0)$**.**
- Husk at andregradsfunksjonen kan faktoriseres hvis den har løsning(er):
  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Grafen er symmetrisk om linjen: $x = \frac{-b}{2a}$.

For å tegne grafen til en andregradsfunksjon kan vi tenke slik:

1) Er grafen sur eller smiler den?

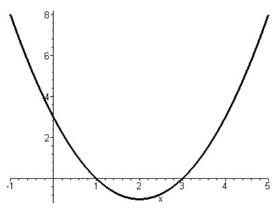
2) Bestem symmetrilinjen: $x = \frac{-b}{2a}$ og $f(\frac{-b}{2a})$. Faktisk er punktet: $(x = \frac{-b}{2a}, y = f(\frac{-b}{2a}))$ koordinatene til maksimumspunktet ($a < 0$) eller minimumspunktet ($a > 0$).

3) Bestem eventuelle nullpunkt.

4) Bestem skjæringspunktet med *y*-aksen $(0, c)$.

Eksempel 2.6

Tegn grafen til $y = x^2 - 4x + 3$



1) Nullpunktene :

$x^2 - 4x + 3 = 0$ og dermed er $x = 1 \vee x = 3$

2) Symmetrilinjen: $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2} = 2$.

3) $a = 1 > 0$ grafen smiler og dermed er

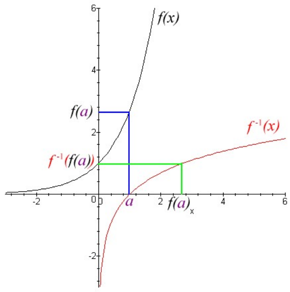
$(2\,,\, f(2)) = (2\,,\, 2^2 - 4(2) + 3 = -1)$ lokalt minimum.

2.10 Inverse funksjoner

En invers funksjon til en funksjon $y = f(x)$ der $x \in D_f$ og $y \in V_f$ er en relasjon som tilordner *y*-verdien tilbake til *x*-verdien.

$$x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y$$

Dermed er: $y = f^{-1}(x)$ der $D_{f^{-1}} = V_f$ og $V_{f^{-1}} = D_f$



Kravet for at en funksjon har en invers funksjon er at funksjonen er entydig (monoton).

Husk: $f^{-1}(f(x)) = x$ og $f(f^{-1}(x)) = x$

- Hvordan kan vi bestemme den inverse funksjonen til $y = f(x)$?

1) Bestem *x* med hensyn til *y*.

2) Bytt om *x* og *y*.

Eksempel 2.7

Bestem den inverse funksjonen til $y = f(x) = x^2 + 1$ gitt $x > 0$

1) Finner *x* uttrykt ved *y*:

$x^2 = y - 1$ og siden $x > 0$, får vi: $x = \sqrt{y-1}$

2) Bytter om *x* og *y*:

$y = \sqrt{x-1}$ dermed er: $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

Bemerk: $D_{f^{-1}} = V_f = [1, \infty >$ og $V_{f^{-1}} = D_f = [0, \infty >$.

2.11 Rasjonale ligninger

En brøk er ikke definert når nevneren er null. I rasjonale uttrykk må vi derfor passe på at nevneren ikke blir null. I uttrykket

$$\frac{x-1}{x(x+1)}$$

er nevneren null når $x=0$ og når $x=-1$. Det er ikke mulig å sette inn $x=0$ eller $x=-1$ i uttrykket. Derfor må vi forutsette $x \neq 0$ og når $x \neq -1$ når vi regner med dette uttrykket. Slike forutsetninger er svært viktige når vi løser ligninger der den ukjente er med i nevneren.

(”≠” betyr ”ikke lik” , i motsetning til ”=”, som betyr ”lik”)

Eksempel 2.8

Løs ligningene: **a)** $\dfrac{x+3}{x(x+1)}=2$ **b)** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2x-1}=2$

a)

$$\frac{x+3}{x(x+1)}-\frac{2x(x+1)}{x(x+1)}=0 \Rightarrow \frac{-2x^2-x+3}{x(x+1)}=0 \Rightarrow -2x^2-x+3=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=1\,, x=-\frac{3}{2}}}$$

b) 2 flyttes til venstre side og fellesnevneren er $x(2x-1)$

$$\frac{2x-1}{x(2x-1)}+\frac{x}{x(2x-1)}-\frac{2x(2x-1)}{x(2x-1)}=0$$

$$\frac{-4x^2+5x-1}{x(2x-1)}=0 \Rightarrow -4x^2+5x-1=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=1}} \vee \underline{\underline{x=\frac{1}{4}}}$$

Bemerk: $\dfrac{A}{B}=0 \Rightarrow A=0 \quad (B \neq 0)$

2.12 Irrasjonale ligninger

Vi skal studere noen enkle irrasjonale ligninger på formen: $\sqrt{ax+b}=cx+d$

Eksempel 2.9

Løs ligningene: **a)** $\sqrt{2x+3}=x$ **b)** $5+\sqrt{x-3}=x$

a) $\sqrt{2x+3}=x$

Begge sider kvadreres: $2x+3=x^2$

Man får da andregradsligningen: $x^2-2x-3=0$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-4(-3)}}{2}=\begin{cases}-1 & \sqrt{2\cdot(-1)+3}=1 \doteq -1\\ 3 & \sqrt{2\cdot 3+3}=3 \quad OK!\end{cases}$$

b) Leddet med kvadratroten ønsker vi å ha alene på én side av ligningen.

Ligningen må først skrives på formen: $\sqrt{x-3}=x-5$

Begge sider kvadreres: $x-3=\left(x-5\right)^2$

Høyre side utvides ved hjelp av 2. kvadratsetning: $x-3=x^2-10x+25$

Man kan da sette opp andregradsligningen: $x^2-11x+28=0$

Ligningen har 2 reelle løsninger som må settes på prøve:

$$(x-4)(x-7)=0=\begin{cases} 4 & \sqrt{4-3}=4-5 \qquad 1 \doteq -1 \quad \text{Umulig} \\ 7 & \sqrt{7-3}=7-5 \qquad 2=2 \quad OK! \end{cases}$$

2.13 Ulikheter

Ulikheter er et matematisk oppsett med opplysninger om hva som er større, mindre, større og lik, eller mindre og lik noe annet. Minst ett av leddene består av en eller flere ukjente.

Hva er de viktigste reglene ved løsing av en ulikhet?

Reglene når du regner med ulikheter er nesten de samme som når du regner med ligninger. Det kan adderes og subtraheres med samme tall på begge sider. Det kan også multipliseres og divideres med et positivt tall på begge sider. Men hvis det skal multipliseres eller divideres med et negativt tall, må ulikhetstegnet snus for at ulikheten skal stemme.

Å løse en ulikhet er å finne de verdier av x som gjør ulikheten sann.

Hva må man passe på når man løser ulikheter?
Når man løser ulikheter må man passe på å snu ulikhetstegnet når man multipliserer eller dividerer med negative tall.
Regel 1: Legge til / trekke fra det samme tallet på begge sider.

Eksempel: ulikhet $x-2>6$ har samme løsninger som ulikheten $x>8$ (Den andre ulikheten ble hentet fra den første ved å legge 2 på begge sider.)

Regel 2: Hvis vi bytter sidene i ulikhetene, endrer vi retningen på ulikhetstegnet.

Eksempel: ulikhet $3-x>1$ har samme løsninger som ulikheten $1<3-x$. (Vi har byttet side og vendte ``>" til en ``<").

Sist, men ikke minst, den operasjonen som er kilden til alle problemer med ulikheter:

Regel 3a: Multiplisere / dividere med samme positive tall på begge sider.
Regel 3b: Multiplisere / dividere med samme negative tall på begge sider og endre retningen på ulikhetstegnet.
Betrakt ulikhetene med a, b, og c der $c<0$ (c er negativ):

$$a<b \Rightarrow \; ac>bc$$
$$a \geq b \Rightarrow \; ac \leq bc$$

Her skal vi se på noen eksempler med

Enkle ulikheter: $p(x) \;\leq\;,\;<\;,\;\geq\;,\;>\; 0$

Doble ulikheter $m(x) \leq p(x) \leq n(x)$

Rasjonale ulikheter $\dfrac{p(x)}{q(x)} \;\leq\;,\;<\;,\;\geq\;,\;>\; 0$

2.13.1 Enkle ulikheter

Ulikheter der deler av x (i første) inngår, løses som en ligning. Ulikheten settes på standardform slik at du har 0 på den ene siden. Det vil si at alle ledd med x samles på venstre side og trekkes sammen, og at alle tall samles på høyre side og trekkes sammen.

Eksempel 2.10

Løs ulikhetene:

a) $-2x \leq 6$ **b)** $-\dfrac{x}{2} \leq 1$

a) $-2x \leq 6 \Rightarrow \underline{\underline{x \geq -3}}$ b) $-\dfrac{x}{2} \leq 1 \Rightarrow \underline{\underline{x \geq -2}}$

Eksempel 2.11

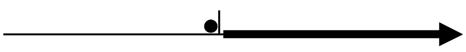
Løs ulikheten:

$$4 - 2x \leq 10 .$$

$$4 - 2x \leq 10 \quad \overset{\text{Det trekkes 4 fra begge sider}}{\Rightarrow} \quad -2x \leq 6 \quad \overset{\text{Begge sider deles med -2}}{\Rightarrow} \quad \underline{\underline{x \geq -3}}$$

Løsningsmengden til ulikheten er da:

$\{x \mid x \geq -3\}$ eller $[-3, \infty)$



Eksempel 2.12

Løs ulikheten: $x^2 + x - 6 \geq 0$

Andregradsligningen kan faktoriseres: $(x+3)(x-2) \geq 0$. Fortegnsskjema:

x	$-\infty$ -3 2 $+\infty$
$x+3$	$-\ -\ -\ -$ 0 $+\ +\ +\ +$ 0 $+\ +\ +\ +$

$x-2$	$- - - -$ 0 $- - - -$ 0 $+ + + +$
$(x+3)(x-2)$	$+ + + +$ 0 $- - - -$ 0 $+ + + +$ Løsning Løsning

Løsningsmengden til ulikheten er da: $\{x \mid x \le -3 \vee x \ge 2\}$ eller $\langle -\infty, -3] \vee [2, \infty \rangle$

2.13.2 Doble ulikheter

En dobbel ulikhet på formen:

$A < ax + b < B$

kan løses ved å gjøre alle prosesser i alle tre deler av ulikheten. Prosessene kan vanligvis gjøres i følgende rekkefølge: subtraksjon/addisjon, multiplikasjon/divisjon.

Eksempel 2.13 – Flersidige ulikheter

Løs ulikheten: $2 < 3x - 1 < 8$

Metode 1: Det adderes 1 på begge sider

$3 < 3x < 9$

$1 < x < 3$

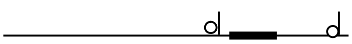
Metode 2: Deler i 2 ulikheter

$2 < 3x - 1$ og $3x - 1 < 8$

$3 < 3x$ $3x < 9$

$1 < x$ $x < 3$

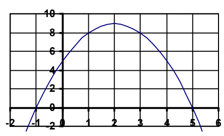
Snittet mellom disse er : $\{x \mid 1 < x < 3\}$ eller $\langle 1 , 3 \rangle$



2.14 Grafisk løsning

Ulikheten $f(x) > g(x)$ kan omskrives som $f(x) - g(x) > 0$. Løsningen er alle x-verdier der $y = f(x) - g(x) > 0$, det vil si der grafen til $y = f(x) - g(x)$ er ovenfor y-aksen.

Eksempel 2.14 - Grafisk løsning



Løs $4x+5>x^2$ grafisk.

Ulikheten skal først omskrives som $-x^2+4x+5>0$
Tegn grafen til $y=-x^2+4x+5$ og bestem mengden av x-verdier der $y>0$:

Løsning: $\{x\,|\,-1<x<5\}$ eller $<-1\,,5>$

2.15 Rasjonale ulikheter

Her skal vi se på noen eksempler der ulikheten har én eller flere rasjonale uttrykk.
En rasjonal ulikhet kan skrives på formen:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}>0\,,\ \frac{P(x)}{Q(x)}\geq 0\,,\ \frac{P(x)}{Q(x)}<0 \text{ eller } \frac{P(x)}{Q(x)}\leq 0$$

der nevneren $Q(x)$ er forskjellig fra null ($Q(x)\neq 0$) og har en variabel.

Eksempel 2.15

Løs ulikheten: $\dfrac{-x-3}{x+1}\geq 0$.

Fortegnsskiftepunkt:
Nullpunkt fåes der telleren er lik null: $-x-2=0 \Rightarrow x=-2$

Bruddpunkt fåes der nevneren=0, dvs. $x+1=0\Rightarrow x=-1$

x	$-\infty$	-3		-1		$+\infty$
$-x-3$	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +$	0	$+\ +\ +\ +$	
$x+1$	$-\ -\ -\ -$	0	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +$	
$\dfrac{-x-3}{x+1}$	$+\ +\ +\ +$	0	$-\ -\ -\ -$	$\times$[4]	$+\ +\ +\ +$	
	Løsning					

Løsning: $\{x\,|\,x\leq -3 \vee x>-1\}$ eller $<-\infty,-3] \vee -1,\infty>$

Oppgaver – Kapittel 2

Oppgave 2.1
Hvilken av følgende uttrykk for $y=f(x)$ beskriver en funksjon?

a) $y=x^4$ **b)** $y^2=x+1$ **c)** $y=\sqrt{x+1}$

Oppgave 2.2

a) Gitt $f(x)=\sqrt{x^2+1}$.
Bestem $f(0)$, $f(1)$, $f(\sqrt{3})$ og $f(\sqrt{a-1})$

[4] $\times$ betegner bruddpunkt.

b) Gitt $f(x) = x^2 + 1$ og $g(x) = \sqrt{x-1}$ der $x > 1$.
Bestem $f(g(x))$ og $g(f(x))$ [5]**.** Hva kan vi si om *f* og *g* ? [6]

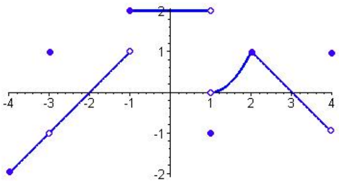
Oppgave 2.3

Gitt $f(x) = \sqrt{x-2}$ **.**
Bestem definisjonsmengden og verdimengden til til f. Bestem $f^{-1}(x)$**.**
Sett opp funksjonen $g(x) = f^2(x) + 2$.

Oppgave 2.4
Gitt $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x}$. Hva er definisjonsmengden til *f*? Tegn grafen til $f(x)$**.**

Oppgave 2.5

Grafen til en funksjon er vist her:



a) Bestem $f(-3)$ og $f(2)$.
b) Er funksjonen kontinuerlig[7] i punktene $x = -3$ og $x = 2$?

Oppgave 2.6
Tegn grafen til $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ der $x \neq 0$.

Oppgave 2.7
Løs ligningene:

a) $2(x+4) - 3x = 5 - 3(x-3)$ **b)** $\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4}x = \dfrac{1}{12}$ **c)** $\dfrac{3}{2}(b-1) - \dfrac{2}{3}(1-b) = \dfrac{5}{2}b$

Oppgave 2.8
Løs ligningene:

a) $2x^2 = 50$ **b)** $3x^2 - 12x = 0$ **c)** $\dfrac{2}{5}x^2 - \dfrac{10}{9} = 0$

Oppgave 2.9
Løs ligningene:

a) $\dfrac{x}{5} = \dfrac{1}{2}$ **b)** $\dfrac{1+x}{2} = 3$ **c)** $\dfrac{6}{1+4x} = 0{,}5$

Oppgave 2.10
Løs ligningene:

a) $(x-5)(x+1) = 0$ **b)** $x(x+2) = 8$ **c)** $y^2 - 7y + 12 = 0$

Oppgave 2.11

[5] $f(g(x))$ og $g(f(x))$ kalles sammensatt funksjon. Disse kan også skrives som $f \circ g$ og $g \circ f$ **.**
[6] Se kapittel 2.10 Inverse funksjoner.
[7] Se kapittel 5.4 Kontinuitet.

Løs ligningene:

a) $\sqrt{x+1}=1$ **b)** $2(x-1)=\sqrt{6-x}$ **c)** $x-\sqrt{x-2}=2$

Oppgave 2.12
Løs ligningene **a)** $\sqrt{x+9}-\sqrt{x+2}=1$ **b)** $\sqrt{2x-1}=\sqrt{x-1}+1$

Oppgave 2.13

Løs ulikhetene:

a) $5x+4>2x-2$

b) $3(2-x)<3-x$

c) $x+3-2(3+2x)<5(2-x)$

d) $2(x-1)-3(1-x)<x+3$

e) $3(2x+1)-(5-x)>1-(x+3)$

f) $\dfrac{x+4}{3}>\dfrac{2x+1}{3}+1$

g) $\dfrac{7x+4}{4}\leq 2-\dfrac{x-3}{2}+\dfrac{3x}{8}$

h) $\dfrac{x-4}{3}+\dfrac{7}{6}>\dfrac{5-2x}{2}$

Oppgave 2.14

Løs ulikhetene:

a) $x^2-4>3x$ **b)** $x^3-4x<x^2-4$

c) $\dfrac{2}{x-1}-1<\dfrac{2}{x}$ **d)** $\dfrac{4x-2}{x^2+1}<1$

e) $\dfrac{x-2}{1+x}>2$ **f)** $x>\dfrac{x+2}{x}$

Fasit – Kapittel 2

Oppgaver

2.1 **a)** Ja **b)** Nei. fordi $y=\pm\sqrt{x+1}$ **c)** Ja ($x\geq -1$)

2.2 $f(0)=1$, $f(1)=\sqrt{2}$, $f(\sqrt{3})=2$ og $f(\sqrt{a-1})=a$

$f(g(x))=f(\sqrt{x-1})=x$ og $g(f(x))=g(x^2+1)=x$ tilsier at *f* og *g* er inverse funksjoner.

2.3

$D_f=\{x\in R \mid x\geq 2\}$ (alle reelle tall *x* slik at *x* er minst 2)

$V_f = \{y \in R \mid y \geq 0\}$ (alle reelle tall y slik at x er mer eller lik 0)

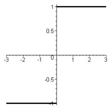
$g(x) = x$ der $x \geq 2$. $f^{-1}(x) = x^2 + 2$.

2.4 $D_f = \{x \in R \mid x \neq 0\}$ alle reelle tall unntatt 0.

$f(x) = x + 1$ (tegn grafen til linjen $y = x + 1$ der punktet $(0\,,1)$ ikke ligger på grafen.

2.5 $f(-3) = 1$ og $f(2) = 1$ **.** Funksjonen er kontinuerlig i $x = 2$ men ikke i $x = -3$**.**

2.6 $f(x) = \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$



2.7	**a)** $x = 3$	**b)** $x = -1$	**c)** $b = -\dfrac{13}{2}$
2.8	**a)** $x = \pm 5$	**b)** $x = 0 \vee x = 4$	**c)** $x = \pm\dfrac{5}{3}$
2.9	**a)** $x = 2{,}5$	**b)** $x = 5$	**c)** $x = 2{,}75$

2.10	**a)** $x = 5 \vee x = -1$	**b)** $x = -4 \vee x = 2$	**c)** $y = 3 \vee y = 4$
2.11	**a)** $x = 0$	**b)** $x = 2$	**c)** $x = 3 \vee x = 2$

2.12

a)

$$\sqrt{x+9} - \sqrt{x+2} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x+9} = \sqrt{x+2} - 1 \Rightarrow x + 9 = x + 2 + 1 - 2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow 6 = -2\sqrt{x+2} \Leftrightarrow$$

$$-3 = \sqrt{x+2} \Rightarrow 9 = x + 2 \Rightarrow x = 7$$

Innsetting viser at løsningen $\underline{\underline{x = 7}}$ passer.

b)

$$\sqrt{2x-1} = \sqrt{x-1} + 1 \Rightarrow 2x - 1 = x - 1 + 1 + 2\sqrt{x-1} \Leftrightarrow x + 1 = 2\sqrt{x-1} \Rightarrow$$

$$x^2 + 2x + 1 = 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 = 0$$

Det siste er åpenbart umulig, siden $(x-1)^2 + 4 \geq 4 > 0$. Ligningen har ingen løsning.

2.13

a) $5x + 4 > 2x - 2 \Leftrightarrow 3x > -6 \Leftrightarrow \underline{\underline{x > -2}}$

b) $3(2 - x) < 3 - x \Leftrightarrow 6 - 3x < 3 - x \Leftrightarrow -2x < -3 \Leftrightarrow \underline{\underline{x > \tfrac{3}{2}}}$

c) $x + 3 - 2(3 + 2x) < 5(2 - x) \Leftrightarrow x + 3 - 6 - 4x < 10 - 5x \Leftrightarrow 2x < 13 \Leftrightarrow \underline{\underline{x < \tfrac{13}{2}}}$

d) $2(x - 1) - 3(1 - x) < x + 3 \Leftrightarrow 2x - 2 - 3 + 3x < x + 3 \Leftrightarrow 4x < 8 \Leftrightarrow \underline{\underline{x < 2}}$

e) $3(2x + 1) - (5 - x) > 1 - (x + 3) \Leftrightarrow 6x + 3 - 5 + x > 1 - x - 3 \Leftrightarrow 8x > 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x > 0}}$

f) $\dfrac{x+4}{3} > \dfrac{2x+1}{3} + 1 \Leftrightarrow x + 4 > 2x + 1 + 3 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$

g)

$$\frac{7x+4}{4} \le 2 - \frac{x-3}{2} + \frac{3x}{8} \Leftrightarrow 2\left(7x+4\right) \le 16 - 4\left(x-3\right) + 3x \Leftrightarrow$$

$$14x + 8 \le 16 - 4x + 12 + 3x \Leftrightarrow 15x \le 20 \Leftrightarrow x \le \tfrac{20}{15} \Leftrightarrow \underline{\underline{x \le \tfrac{4}{3}}}$$

h)

$$\frac{x-4}{3} + \frac{7}{6} > \frac{5-2x}{2} \Leftrightarrow 2\left(x-4\right) + 7 > 3\left(5-2x\right) \Leftrightarrow$$

$$2x - 8 + 7 > 15 - 6x \Leftrightarrow 8x > 16 \Leftrightarrow x > 2$$

i)

$$\frac{3-5x}{5} > \frac{1+x}{3} - 2 \Leftrightarrow 3\left(3-5x\right) > 5\left(1+x\right) - 30 \Leftrightarrow 9 - 15x > 5 + 5x - 30 \Leftrightarrow$$

$$34 > 20x \Leftrightarrow x < \tfrac{34}{20} \Leftrightarrow \underline{\underline{x < \tfrac{17}{10}}}$$

j)

$$\frac{2\left(x-1\right)-3}{4} \ge \frac{5+4x}{3} \Leftrightarrow 3\cdot\left(2\left(x-1\right)-3\right) \ge 4\left(5+4x\right) \Leftrightarrow 6x - 15 \ge 20 + 16x \Leftrightarrow$$

$$-10x \ge 35 \Leftrightarrow x \le -\tfrac{35}{10} \Leftrightarrow \underline{\underline{x \le -\tfrac{7}{2}}}$$

2.14

$x^2 - 4 > 3x$

a) $x^2 - 3x - 4 > 0$

$(x+1)(x-4) > 0$

x	$-\infty$ -1 4 $+\infty$
$x+1$	$- - - -$ 0 $+ + + +$ 0 $+ + + +$
$x-4$	$- - - -$ 0 $- - - -$ 0 $+ + + +$
$\left(x+1\right)\left(x-4\right) > 0$	$+ + + +$ 0 $- - - -$ 0 $+ + + +$ Løsning Løsning

Løsning:

$\{x \mid x < -1 \vee x > 4\}$ eller $< -\infty, -1 > \vee < 4, \infty >$

b) $\underline{\underline{-2 < x < 1}}$ eller $\underline{\underline{x > 2}}$

c) $$\frac{2}{x-1} - 1 < \frac{2}{x}$$

$$\frac{2\cdot x - 1\cdot x\left(x-1\right) - 2\cdot\left(x-1\right)}{\left(x-1\right)x} < 0 \Rightarrow \quad \frac{2x - x^2 + x - 2x + 2}{\left(x-1\right)x} < 0$$

$$\frac{-x^2 + x + 2}{\left(x-1\right)x} < 0 \Rightarrow \quad \frac{-\left(x-2\right)\left(x+1\right)}{\left(x-1\right)x} < 0 \Rightarrow \quad \text{eller} \quad \frac{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}{\left(x-1\right)x} > 0$$

Tallinjediagram:

x	$-\infty$ -1 0 1 2 $+\infty$
$x-2$	$- - -$ 0 $- - -$ 0 $- - -$ 0 $- - -$ 0 $+ + +$
$x+1$	$- - -$ 0 $+ + +$ 0 $+ + +$ 0 $+ + +$ 0 $+ + +$
x	$- - -$ 0 $- - -$ 0 $+ + +$ 0 $+ + +$ 0 $+ + +$
$x-1$	$- - -$ 0 $- - -$ 0 $- - -$ 0 $+ + +$ 0 $+ + +$
$\dfrac{(x-2)(x+1)}{x}$	$+ + +$ 0 $- - -$ $\times$[8] $+ + +$ 0 $- - -$ 0 $+ + +$

Løsning: $\underline{\underline{x < -1}}$ eller $\underline{\underline{0 < x < 1}}$ eller $\underline{\underline{x > 2}}$

[8] $\times$ betegner bruddpunkt.

d) Her vet vi at x^2+1 er positiv siden x^2 aldri kan bli negativ. Altså kan vi multiplisere begge sider av ulikheten med x^2+1:

$$\frac{4x-2}{x^2+1}<1 \quad\Leftrightarrow\quad 4x-2<x^2+1 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-4x+3>0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-3)(x-1)>0$$

Setter opp fortegnsskjema, og får $\underline{\underline{x<1}}$ eller $\underline{\underline{x>3}}$.

e)

$$\frac{x-2}{1+x}>2 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x+1}-2>0 \Leftrightarrow \frac{x-2-2(x+1)}{x+1}>0 \Leftrightarrow \frac{-x-4}{x+1}=-\frac{x+4}{x+1}>0 \text{ eller } \frac{x+4}{x+1}<0.$$

Vi bruker tallinjediagram:

x	$-\infty$ $\quad$ -4 $\quad$ -1 $\quad$ $+\infty$
$x+4$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$ $\quad$ 0 $+\ +\ +\ +\ +\ +$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\ +\ +\ +\ +$
$x+1$	$-\ -\ -\ -\ -\ -$ $\quad$ 0 $-\ -\ -\ -\ -\ -$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\ +\ +\ +\ +$
$\frac{x+4}{x+1}$	$+\ +\ +\ +\ +\ +$ $\quad$ 0 $-\ -\ -\ -\ -\ -$ $\quad$ $\times$ $\quad$ $+\ +\ +\ +\ +$

Konklusjonen er at $\frac{x+4}{x+1}<0 \Leftrightarrow \underline{\underline{-4<x<-1}}$

f) $x>\frac{x+2}{x} \Leftrightarrow x-\frac{x+2}{x}>0 \Leftrightarrow \frac{x^2-x-2}{x}>0$. Her finner vi røttene i annengradspolynomet i telleren: $x=\frac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{1+8}\right)=\frac{1}{2}(1\pm 3)=\begin{cases}2\\-1\end{cases}$, slik at $x^2-x-2=(x-2)(x+1)$. og

$\frac{x^2-x-2}{x}=\frac{(x-2)(x+1)}{x}$. Tallinjediagram:

x	$-\infty$ $\quad$ -1 $\quad$ 0 $\quad$ 2 $\quad$ $+\infty$
$x-2$	$-\ -\ -\ -$ $\quad$ 0 $-\ -\ -\ -$ $\quad$ 0 $-\ -\ -\ -0$ $\quad$ $+\ +\ +\ +$
$x+1$	$-\ -\ -\ -$ $\quad$ 0 $+\ +\ +\ +$ $\quad$ 0 $+\ +\ +\ +$ 0 $\quad$ $+\ +\ +\ +$
x	$-\ -\ -\ -$ $\quad$ 0 $-\ -\ -\ -$ 0 $+\ +\ +\ +$ 0 $\quad$ $+\ +\ +\ +$
$\frac{(x-2)(x+1)}{x}$	$-\ -\ -\ -$ $\quad$ 0 $+\ +\ +\ +$ $\times$ $-\ -\ -\ -$ 0 $\quad$ $+\ +\ +\ +$ Løsning $\qquad$ Løsning

Konklusjonen er at $\frac{x^2-x-2}{x}>0 \Leftrightarrow \underline{\underline{-1<x<0 \quad\vee\quad x>2}}$

Kapittel 3 Eksponentielle funksjoner og logaritmer

Her skal vi studere eksponentielle funksjoner som kan beskrive en eksponentiell vekst og lære oss hvordan vi kan benytte logaritmer til å løse eksponentialligninger.
Vi skal også oppsummere at $y = e^x$ og $y = \ln x$ er inverse funksjoner.

3.1 Eksponentiell vekst

Når en størrelse øker/synker med en fast prosent over like store tidsrom, kalles endringen en eksponentiell vekst/reduksjon.

$$f(x) = c \cdot a^x \quad a > 0 \quad c > 0 \qquad \begin{cases} \text{Eksponentiell vekst når} & a > 1 & \text{For eksempel} & y = 5 \cdot 2^x \\ \text{Eksponentiell reduksjon når} & 0 < a < 1 & \text{For eksempel} & y = 7 \cdot (\frac{1}{2})^x \end{cases}$$

der a er vekstfaktor og kan skrives som $a = 1 + \frac{p}{100}$ og p kalles rentefot (gitt i %).

Eksempel:

For en verdi som $\begin{cases}\text{Vokser} \\ \text{Synker}\end{cases}$ med 20%	$\begin{cases}\text{Vokser med 20\%} & a = 1 + 0,2 = 1,2 \\ \text{Synker med 20\%} & a = 1 - 0,2 = 0,8\end{cases}$
For en verdi som vokser med 200%	$a = 1 + 2 = 3$

Eksempel 3.1

Ved 1. januar 1980 var jordens befolkning 4,1 milliarder. Vi regner med at folketallet vokser med ca. 2 % pr. år. Sett opp en funksjon som beskriver folketallet t år etter året 1980.

Modellering ved hjelp av eksponentialfunksjonen: $f(t) = c \cdot a^t$.
Vi ønsker å bestemme c og a.

Vi kan betrakte året 1980 som $t = 0$ og dermed er $f(0) = 4,1 \Rightarrow f(0) = c \cdot a^0 = c = 4,1$
Vekstfaktoren er $a = 1 + 0,02 = 1,02$ og funksjonen blir:

$$f(t) = 4,1 \cdot (1,02)^t \quad \text{(milliarder)}$$

som bestemmer folketallet t år etter året 1980.

3.2 Logaritmer $f(x) = \log x$ og $f(x) = \ln x$.

Logaritmen til et tall *a* med grunntall *b* er den eksponenten *x* som grunntallet må opphøyes i for å få tallet *b*:

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_b a \quad \text{der } a > 0 \text{ og } b > 0$$

Grunntallet *b* kalles også *basis* for logaritmen. Tallet *b* er *antilogaritmen*. Logaritmer med grunntall lik *eulertallet* kalles *naturlige logaritmer*, mens *briggske logaritmer* bruker grunntallet 10.

Dersom vi skal bestemme eksponenten i ligningen $a^x = b$, benytter vi logaritmer.

$$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_b a$$

Senere skal vi se at $a^x = b \Rightarrow x = \log_b a = \dfrac{\log a}{\log b} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$ (se oppgave 3.10)

Når $a > 0$ gjelder: $\boxed{y = a^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y}$

Ti-logaritmer (Briggske logaritmer): $y = 10^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log y$

Naturlige logaritmer $y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln y$

$\log 10 = 1$, $\log 1 = 0$, $\ln e = 1$, $\ln 1 = 0$

Bemerk at $x = 0$ er vertikal asymptote for $f(x) = \log x$ ($\lim\limits_{x \to 0^+} \log x \to -\infty$) .

Noen nyttige regler

$\log(10^A) = A$ $\qquad \ln(e^A) = A$

$10^{\log A} = A$ $\qquad e^{\ln A} = A$

3.3 Regneregler for logaritmer

$\log(A \cdot B) = \log A + \log B$ $\qquad \log \dfrac{A}{B} = \log A - \log B$ $\qquad \log A^n = n \cdot \log A$

der $A \neq 0$ og $B \neq 0$

Eksempel 3.2

Skriv så enkelt som mulig:

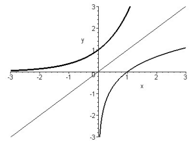
a) $\log 100$ **b)** $\log 1000$ **c)** $\log 0,001$ **d)** $\log\sqrt{10}$ **e)** $\log\dfrac{7}{100}$

Fasit: **a)** 2 **b)** 3 **c)** -3 **d)** $0,5$ **e)** $\log 7 - 2$

3.4 Den naturlige logaritmefunksjonen

Dersom grunntallet i logaritmen er "e", kalles logaritmen *den naturlige logaritmen*.

$y = e^x$ og $y = \ln x$ er inversfunksjoner.



- $\lim\limits_{x\to\infty} e^x \to \infty$ og $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \to 0$ ($y = 0$ er horisontal asymptote for $y = e^x$)
- $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x \to -\infty$ og ($x = 0$ er vertikal asymptote for $y = \ln x$)

3.5 $y = e^x$ og $y = \ln x$ er inversfunksjoner

Når $a > 0$ gjelder: $\boxed{y = a^x \quad\Leftrightarrow\quad x = \log_a y}$

og dette kan bety at $y = \log_a x$ er inversfunksjonen til $y = a^x$

$$f(x) = 10^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \log x$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f^{-1}(x) = \ln x$$

3.6 Eksponentiale og logaritmiske ligninger

3.6.1 Ligningen $a^x = b$

Generelt

$$a^x = b$$

$$\ln(a^x) = \ln(b)$$

$$x \cdot \ln a = \ln b$$

$$x = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Eksempel 3.3

$$3^x = 7$$

$$\ln(3^x) = \ln(7)$$

$$x \cdot \ln 3 = \ln 7$$

$$x = \frac{\ln 7}{\ln 3}$$

3.6.2 Noen eksponentialligninger

Her skal vi se på noen eksponentialligninger som kan løses ved hjelp av forskjellige framgangsmåter.

Eksempel 3.4

Løs ligningene:

a) $3e^{2x+1} = 5$ b) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$

a) $3e^{2x+1} = 5$ $e^{2x+1} = \frac{5}{3}$ $2x+1 = \ln(5/3)$ $\underline{\underline{x = \frac{1}{2}(\ln(5/3)-1)}}$	b) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$ Velger hjelpevariabelen: $u = e^{x}$ $u^2 - 3u + 2 = 0$ som gir: $u = 1 \vee u = 2$ $e^{x} = 1 \Rightarrow x = \ln 1 = \underline{\underline{0}}$ $e^{x} = 2 \Rightarrow x = \underline{\underline{\ln 2}}$

$ae^{2x} + be^{x} + c = 0$ kan løses ved å velge $u = e^{x}$: $au^2 + bu + c = 0$ (andregradsligning)

3.6.3 Noen logaritmiske ligninger

Eksempel 3.5

Løs ligningene:

a) $\ln(x-1) = 2$ **b)** $3\ln(x) + \ln(x^2) = \ln(32)$ **c)** $\ln(x) + \ln(2x-1) = 0$

a)	**b)**	**c)**
$\ln(x-1) = 2$ $x - 1 = e^2$ $\underline{\underline{x = e^2 + 1}}$	$2\ln(x) + \ln(x^3) = \ln(243)$ $\ln(x^2 \cdot x^3) = \ln(243)$ $x^5 = 243 \Rightarrow \underline{\underline{x = \sqrt[5]{243} = 3}}$	$\ln(x) + \ln(2x-1) = 0$ $\ln(x(2x-1)) = 0$ $x(2x-1) = 1 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$ $x = -\frac{1}{2}$, $\underline{\underline{x = 1}}$ Bemerk: $x = -\frac{1}{2}$ kan ikke være løsning fordi $x >$ (

Oppgaver – Kapittel 3

Oppgave 3.1

Skriv så enkelt som mulig: **a)** $\dfrac{e^{2x}+2e^{x}}{e^{x}}$ **b)** $\dfrac{5e^{2x}+\left(2e^{x}\right)^{2}}{\left(3e^{x}\right)^{2}}$

Oppgave 3.2

Eksponentialfunksjonen gitt ved: $f(x)=c\cdot a^{x}$ kan skrives som $f(x)=c\cdot e^{kx}$.
Bestem *k*.

Oppgave 3.3

Folketallet i en bygd ved 1. januar 2000 var 1500.
Vi regner med at bygdens befolkning vokser med ca. 3 % pr. år.

a) Sett opp en funksjon som beskriver folketallet t år etter året 2000.

b) Hva er folketallet til bygda i slutten av 2005 etter denne modellen.

Oppgave 3.4

t år etter at en organisme døde, er andelen av radium redusert til p % av mengden i den levende organismen. Halveringstiden er ca.1620 år.

Sett opp en eksponentialfunksjon som beskriver $p(t)$ målt i %.

Oppgave 3.5

Skriv så enkelt som mulig uten å bruke kalkulator:

a) $\ln e+2\ln 1$ **b)** $\ln e^{2}$ **c)** $\ln a+2\ln\sqrt{a}-\ln a^{2}$

d) $\ln\left(3a^{2}\right)+2\ln a-\ln\left(a^{4}\right)$ **e)** $\ln e^{x}$ **f)** $\ln a^{3}+3\ln\sqrt[3]{a}-2\ln a^{2}$

Oppgave 3.6

Skriv så enkelt som mulig:

a) $e^{3\ln x}$ **b)** $e^{2\ln\sqrt{x}}$ **c)** $e^{2\ln x+\ln 5}$

Oppgave 3.7

Løs ligningene:

a) $e^{2x}=5$ **b)** $5e^{2x}=11$ **c)** $3e^{5x}-7=0$

Oppgave 3.8

Løs ligningene:

a) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$ **b)** $e^{x} + 2e^{-x} - 3 = 0$

Oppgave 3.9

Løs ligningene:

a) $2\ln x - 1 = 0$ **b)** $3\ln x + \ln x^2 = 9$

c) $2^x = 6$ **d)** $5 \cdot 3^x = 7$

Oppgave 3.10

Vis at $a^x = b \Rightarrow x = \log_b a = \dfrac{\log a}{\log b} = \dfrac{\ln a}{\ln b}$.

Fasit – Kapittel 3

3.1 **a)** $e^x + 2$ **b)** 1

3.2 Vi vet at : $a = e^{\ln a}$. $a^x = (e^{\ln a})^x = e^{\ln a \cdot x}$ dermed er $k = \ln a$.

3.3 **a)** $N(t) = 1500 \cdot (1{,}03)^t$ **b)** $N(6) = 1500 \cdot (1{,}03)^6 \approx 1791$

3.4 $p(t) = 100 \cdot (\frac{1}{2})^{\frac{t}{1620}}$ eller $p(t) = 100 \cdot e^{\frac{t}{1620}\ln 2}$

3.5 **a)** 1 **b)** 2 **c)** 0 **d)** $\ln 3$ **e)** x **f)** 0

3.6 **a)** x^3 **b)** x **c)** $5x^2$

3.7 **a)** $x = \frac{1}{2}\ln 5$ **b)** $x = \frac{1}{2}\ln\frac{11}{5}$ **c)** $x = \frac{1}{5}\ln\frac{7}{3}$

3.8 **a)** $x = 0 \vee x = \ln 2$

b) Hvis man multipliserer begge sider med e^x, får man samme ligning som i del a)
$x = 0 \vee x = \ln 2$

3.9 **a)** $x = e^{\frac{1}{2}}$ **b)** $x = e^{\frac{9}{5}}$

c) $x = \dfrac{\ln 6}{\ln 2}$ **d)** $x = \dfrac{\ln\frac{7}{5}}{\ln 3} = \dfrac{\ln 7 - \ln 5}{\ln 3}$

3.10

$a^x = b \Rightarrow \ln(a^x) = \ln(b) \Rightarrow x \cdot \ln a = \ln b \Rightarrow x = \dfrac{\ln b}{\ln a}$ Def. $a^x = b \Rightarrow x = \log_b a$

$a^x = b \Rightarrow \log(a^x) = \log(b) \Rightarrow x \cdot \log a = \log b \Rightarrow x = \dfrac{\log b}{\log a}$

Kapittel 4 Trigonometri i grader og radianer

Trigonometri (fra gresk trigonon = tre vinkler og metro = måling) er en gren innenfor matematikken som studerer forholdet mellom vinkler og sider i en rettvinklet trekant. Trigonometri anvendes i matematikk, astronomi og landmåling, men også innen felter som ikke er direkte forbundet med dette, som mekanikk og frekvensanalyse (lyd, lys, optikk, kvantemekanikk). Det er uenighet om trigonometrien er en egen matematisk gren eller om den er underlagt geometrien.

I naturen gjentar det seg noen fenomener over en bestemt tidsperiode. Har man informasjon om fenomenet i denne tidsperioden, kan man bruke trigonometriske funksjoner til å beskrive fenomenet over flere tidsperioder.

4.1 Vinkelmål: grader og radianer

Vinkelmålet *radian* er en SI-enhet definert som buelengde delt på radius. Det kalles også for absolutt vinkelmål. Andre vinkelmål er grader, som kanskje er mest kjent. 360° grader tilsvarer 2π radianer. Omregningsformelen er:

$$\frac{\pi}{r} = \frac{180}{d} \Rightarrow r = \frac{\pi}{180} d$$

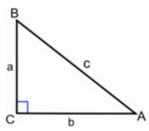
der r er vinkelen regnet i radien og d vinkelen regnet i grader (engelsk: degrees).

Eksempel 4.1

Omgjør 30, 45, 60, 90 og 360 grader til radianer.

Vi vet at: $180^o = \pi^{rad}$, dermed er: $30^o = \frac{\pi}{6}^{rad}, 45^o = \frac{\pi}{4}^{rad}, 60^o = \frac{\pi}{3}^{rad}, 90^o = \frac{\pi}{2}^{rad}, 360^o = 2\pi^{rad}$

4.2 Rettvinklet trekant



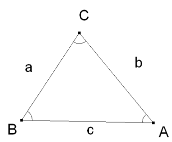
En rettvinklet trekant er en trekant hvor én av de tre vinklene er 90 grader, og hvor Pythagoras' setning gjelder:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Forholdet mellom katetene og hypotenusen kan defineres ved hjelp av sinus og cosinus:

$$\sin A = \frac{a}{c} \qquad \cos A = \frac{b}{c} \qquad \tan A = \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

4.3 Trekantberegninger



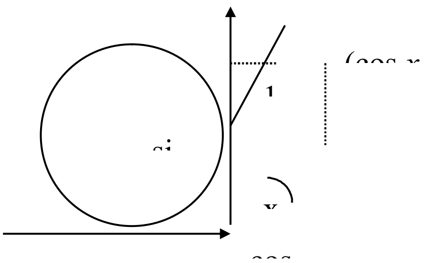
Cosinussetningen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$

Sinussetningen: $\dfrac{\sin(A)}{a} = \dfrac{\sin(B)}{b} = \dfrac{\sin(C)}{c}$

Se oppgave 4.11-4.14

4.4 Trigonometri i radianer

- **Enhetssirkel, sinus, cosinus og tangens**



Figuren til venstre viser de grunnleggende definisjonene av de trigonometriske funksjonene.

- Enhetssirkel (en sirkel med radius 1 med sentrum i origo)
- Cosinus-aksen (horisontalaksen)
- Sinus-aksen (vertikalaksen)
- Skjæringspunktet mellom denne linjen og enhetssirkelen har da koordinatene: $\left(\cos x\,,\, \sin x\right)$.
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Med utgangspunkt i denne definisjonen (og Pytagoras' setning) får vi at:

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

Ved hjelp av enhetssirkelen kan vi sette opp følgende:

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \tan(\pi + x) = \tan(x)$$

Det gjelder også at:

$$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$$
$$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$$

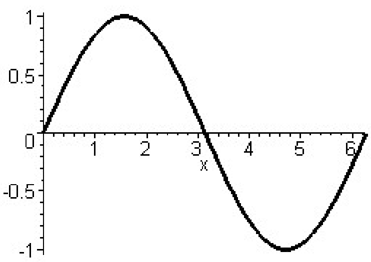
Det kan vises at grafen til en sinusfunksjon og en cosinusfunksjon har $\dfrac{\pi}{2}$ faseforskjell.

4.5 Noen kjente vinkler

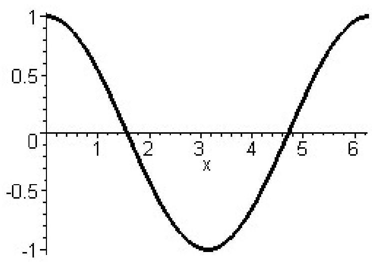
Vinkel	Radianer	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0^o	0	0	1	0
30^o	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60^o	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞
180^o	π	0	-1	0
270^0	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$-\infty$
360^0	2π	0	1	0

4.6 Grafene til sinus, cosinus og tangens

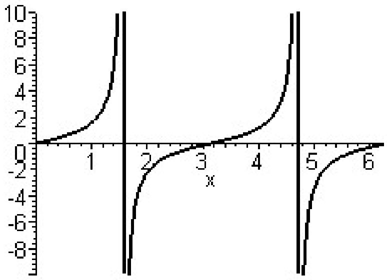
Sinusfunksjon
$y = \sin x \quad 0 \le x \le 2\pi$



Cosinusfunksjon
$y = \cos x \quad 0 \le x \le 2\pi$



Tangensfunksjon
$y = \tan x \quad 0 \le x \le 2\pi$

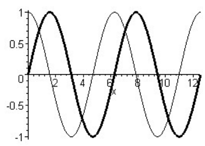


Legg merke til at perioden til sin og cos er 2π , mens for tan er den π :

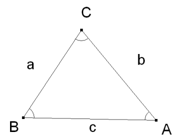
$\sin x = \sin(x + 2\pi)$, $\cos x = \cos(x + 2\pi)$, $\tan x = \tan(x + \pi)$

Husk: Grafen til en sinusfunksjon og en cosinusfunksjon har $\frac{\pi}{2}$ faseforskjell:

$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ eller $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$



4.7 Trekantberegninger (trigonometri i grader)



Cosinussetningen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$

Sinussetningen: $\dfrac{\sin(A)}{a} = \dfrac{\sin(B)}{b} = \dfrac{\sin(C)}{c}$

4.8 Trigonometriske formler

Grunnleggende formler:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

Trigonometriske formler for "$x \pm y$"

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$,
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$

Trigonometriske formler for "$2x$"

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

Andre formler:

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}(\cos(u+v) + \cos(u-v))$$

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2}(\cos(u-v) - \cos(u+v))$$

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2}(\sin(u+v) + \sin(u-v))$$

Eksempel 4.2

Finn eksakte verdier for:

a) $\sin\dfrac{5\pi}{6}$ **b)** $\tan\dfrac{5\pi}{4}$ **c)** $\cos\dfrac{5\pi}{3}$

(Hint: Bruk tabell i delkapittel 4.5)

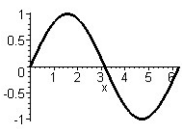
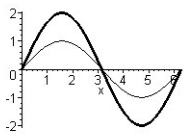
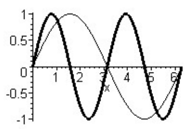
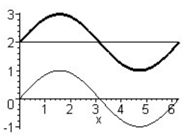
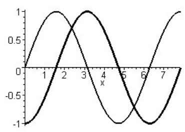
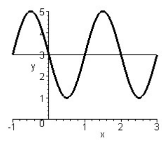
a) $\dfrac{1}{2}$ **b)** -1 **c)** $\dfrac{1}{2}$

4.9 Beskrivelse av et periodisk fenomen ved hjelp av en cosinus- /sinuskurve $y = C_0 + C_1 \cos\frac{2\pi}{T}(t - t_0)$ og $y = C_0 + C_1 \sin\frac{2\pi}{T}(t - t_0)$

der: C_0 er middelverdi (likevektslinje), er C_1 *amplitude*,

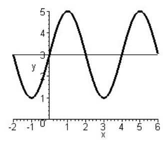
T er periode og *sirkelfrekvens* er gitt ved $\omega = \frac{2\pi}{T}$. t_0 kalles *akrofase*.

Noen eksempler for å studere disse parametrene: $y = C_0 + C_1 \sin\omega(x - x_0)$

$C_0 = 0$, $C_1 = 1$, $T = 2\pi$	**Amplitude** C_1 er fordoblet	**Sirkelfrekvens** ω er fordoblet
$y = \sin x$ 	$y = \sin x$ og $y = 2\sin x$ 	$y = \sin x$ og $y = \sin 2x$ 
C_0 **Likevektslinje** $C_0 = 2$	**Akrofase** $t_0 = \pi/2$	$C_0 = 3$, $C_1 = 2$, $\omega = \pi$ og $t_0 = 1$
$y = \sin x$ og $y = 2 + \sin x$ 	$y = \sin x$ og $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ 	$y = 3 + 2\sin\pi(x - 1)$ 

Eksempel 4.3

Grafen til en periodisk funksjon er tegnet her. Funksjonen kan uttrykkes ved: $y = C_0 + C_1 \sin\omega(x - x_0)$



Bestem de ukjente parametrene C_0, C_1, T og sirkelfrekvens ved $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$C_0 = 3\,,\; C_1 = 2\,,\; \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \;\text{ og }\; x_0 = 0\,.$$

$\cos(x - \pi/2) = \sin(x)$ eller $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$

4.10 Den periodiske funksjonen: $f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$

Omforming til funksjonen som en cosinusfunksjon:

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = C\cos\omega(t - t_0)$$
$$\text{der } C = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ og } \tan(\omega t_0) = \frac{b}{a}$$

Husk at (C , ωt_0) er polarkoordinatene til punktet (a , b), og dermed hører ωt_0 til samme kvadrant som punktet (a , b).

Eksempel 4.4

Gitt funksjonene:

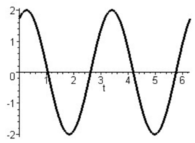
a) $f(t) = \sqrt{3}\cos 2t + \sin 2t$ **b)** $f(t) = \cos \pi t + \sqrt{3}\sin \pi t$

Skriv dem på formen $C\cos\omega(t - t_0)$ og tegn grafen.

a)

$C = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2$ og

$\tan(2t_0) = \dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2t_0 = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \underline{\underline{t_0 = \dfrac{\pi}{12}}}$

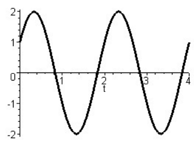


$f(t) = 2\cos 2(t - \dfrac{\pi}{12})$ og grafen blir da:

b)

$C = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = 2$ og

$\tan(\pi t_0) = \dfrac{b}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \pi t_0 = \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \underline{\underline{t_0 = \dfrac{1}{3}}}$



$f(t) = 2\cos \pi(t - \dfrac{1}{3})$ og grafen blir da:

4.11 Ligninger på formen: $a\sin(x) = b$ der $0 \le x \le 2\pi$.

Vi skal løse ligningen: $a\sin(x) = b$ eller $\sin(x) = \frac{b}{a}$ og dermed $x = \sin^{-1}(\frac{b}{a})$

(Her kan du bare taste "SHIFT SINUS($\frac{b}{a}$) eller INV SINUS($\frac{b}{a}$)" på kalkulatoren. Du må først sjekke at kalkulatoren et innstilt på "Radian".)

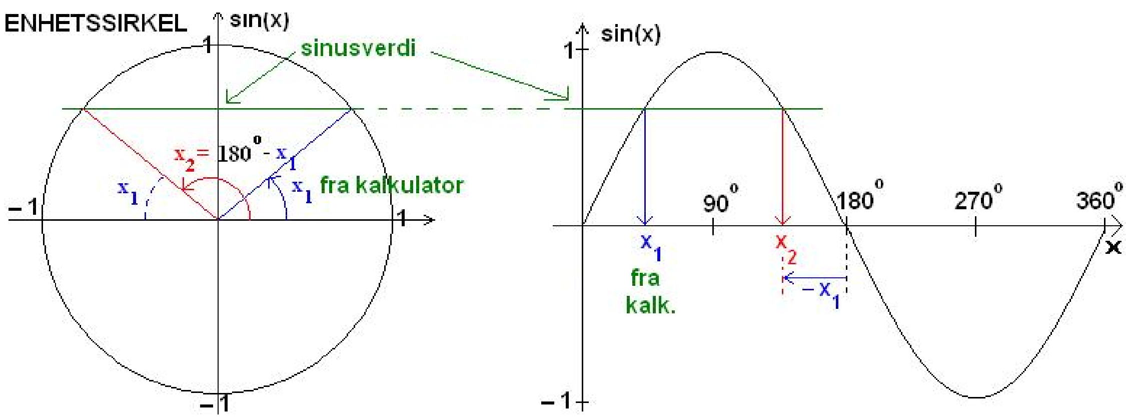
Vi må huske at $-1 \le \sin(x) \le 1$ alltid $\sin(x) = \frac{b}{a}$ gir to vinkler x_1 og $x_2 = \pi - x_1$ i første omløp ($0 \le x \le 2\pi$), eller:

$$x_1 = \sin^{-1}(\frac{b}{a}) \quad \text{og} \quad x_2 = \pi - \sin^{-1}(\frac{b}{a})$$

De generelle løsningene med uendelig mange vinkler er da:

$$x_1 = 2n\pi + \sin^{-1}(\frac{b}{a}) \quad \text{og}\; x_2 = 2n\pi + \pi - \sin^{-1}(\frac{b}{a}) \quad \text{der } n = 0, 1, 2, \cdots$$

Ligningen $\sin(x) = a$ der $0 \le x \le 360^0$ løses på tilsvarende måte. Her er enhetssirkelen tegnet som forklaring.



Eksempel 4.5

Løs ligningene når

a) $6\sin x = 3$ **b)** $7\sin x = 2$ **c)** $7\sin x = -2$

a) $6\sin x = 3$ ’

$\sin x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$x_1 = \sin^{-1}(\frac{1}{2}) = \underline{\underline{\frac{\pi}{6}}}$ ($\sin^{-1}(\frac{1}{2})$ er en kjent vinkel. Se tabell i 4.5)

$x_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \underline{\underline{\frac{5\pi}{6}}}$

Hvis det ikke var angitt $0 \le x \le 2\pi$, ville løsningene være:

$x_1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{6} + 2n\pi}}$ og $x_2 = \underline{\underline{\frac{5\pi}{6} + 2n\pi}}$

b) $7\sin x = 2$

$\sin x = \frac{2}{7}$

$x_1 = \sin^{-1}(\frac{2}{7}) \approx 0,2879 \approx \underline{\underline{0,29}}$

$x_2 = \pi - 0,29 = \underline{\underline{2,85}}$

Hvis det ikke var angitt $0 \le x \le 2\pi$, ville løsningene være:

$x_1 = \underline{\underline{0,29 + 2n\pi}}$ og $x_2 = \underline{\underline{2,85 + 2n\pi}}$ der $n = 0,1,2,\cdots$

c) $7\sin x = -2$

$x_1 = \sin^{-1}(-\frac{2}{7}) \approx -0,2879 \approx 2\pi + (-0,2879) \approx 5,99 \approx \underline{\underline{6}}$

$x_2 = \pi - (-0,2879) \approx \underline{\underline{3,43}}$

Hvis det ikke var angitt $0 \le x \le 2\pi$, ville løsningene være:

$x_1 = \underline{\underline{6 + 2n\pi}}$ og $x_1 = \underline{\underline{3,43 + 2n\pi}}$ der $n = 0,1,2,\cdots$

4.12 Ligninger på formen: $a\cos(x) = c$ der $0 \le x \le 2\pi$.

Vi skal løse ligningen: $a\cos(x) = c$ eller $\cos(x) = \frac{c}{a}$

$x = \cos^{-1}(\frac{c}{a})$ Her kan du bare taste ”SHIFT COSINUS($\frac{c}{a}$) eller INV COSINUS($\frac{c}{a}$) ” på kalkulatoren. Du må først sjekke at kalkulatoren er innstilt på ”Radian”.

Vi må huske at når $-1 \le \cos(x) \le 1$ alltid $\cos(x) = \frac{c}{a}$ gir to vinkler i første omløp ($0 \le x \le 2\pi$)

$x_1 = \cos^{-1}(\frac{c}{a})$ og $x_2 = 2\pi - \cos^{-1}(\frac{c}{a})$

De generelle løsningene med uendelig mange vinkler er da:

$x_1 = 2n\pi + \cos^{-1}(\frac{c}{a})$ og $x_2 = 2n\pi - \cos^{-1}(\frac{c}{a})$ der $n = 0,1,2,\cdots$ eller $x_{1,2} = 2n\pi \pm \cos^{-1}(\frac{c}{a})$

Eksempel 4.6

Løs ligningene når $0 \le x \le 2\pi$

a) $6\cos x = 3$ **b)** $7\cos x = 3$ **c)** $7\cos x = -3$

a) $6\cos x = 3$ ’

$$\cos x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$x_1 = \cos^{-1}(\frac{1}{2}) = \underline{\underline{\frac{\pi}{3}}}$$ ($\cos^{-1}(\frac{1}{2})$ er en kjent vinkel. Se tabell i 4.5)

$$x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \underline{\underline{\frac{5\pi}{3}}}$$

Hvis det ikke var angitt $0 \le x \le 2\pi$, ville løsningene være:

$$x_1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{3} + 2n\pi}} \quad \text{og} \quad x_2 = \underline{\underline{\frac{5\pi}{3} + 2n\pi}}$$

b) $7\cos x = 3$

$$\cos x = \frac{3}{7}$$

$$x_1 = \cos^{-1}(\frac{3}{7}) \approx 1,279 \approx \underline{\underline{1,28}}$$

$$x_2 = 2\pi - 1,28 = \underline{\underline{5,15}}$$

Hvis det ikke var angitt $0 \le x \le 2\pi$, ville løsningene være:

$$x_1 = \underline{\underline{1,28 + 2n\pi}} \quad \text{og} \quad x_2 = \underline{\underline{5,15 + 2n\pi}} \quad \text{der } n = 0,1,2,\cdots$$

c) $7\cos x = -3$

$$x_1 = \cos^{-1}(-\frac{3}{7}) \approx 2,014 \approx \underline{\underline{2,0}}$$

$$x_2 = 2\pi - 2,01 \approx 4,27 \approx \underline{\underline{4,3}}$$

Hvis det ikke var angitt $0 \le x \le 2\pi$, ville løsningene være:

$$x_1 = \underline{\underline{2 + 2n\pi}} \quad \text{og} \quad x_1 = \underline{\underline{4,3 + 2n\pi}} \quad \text{der } n = 0,1,2,\cdots$$

Oppgaver – Kapittel 4

Oppgave 4.1
La x være en vinkel i 1. kvadrant. Finn (uten å bruke kalkulator) sin x og cos x når:

a) $\tan x = \sqrt{3}$ **b)** $\tan x = 1$ **c)** $\tan x = \frac{5}{12}$

Oppgave 4.2
Løs ligningene:

a) $5 \cos x - 2 = 0,\ x \in [0,\ 2\pi >$

b) $2 \sin x + \sqrt{3} = 0,\ x \in [0,\ 2\pi >$

c) $4 \tan x + 11 = 2,\ x \in [0,\ 2\pi >$

Oppgave 4.3

a) Gitt $\cos v = \frac{7}{25}$ og $v \in [270°,\ 360°]$. Bestem $\sin v$ og $\tan v$.

b) Vis at $2 \cos (x + \frac{2\pi}{3}) - 4 \sin (x - \frac{\pi}{6}) = \cos x - 3\sqrt{3} \sin x$

c) Gitt $\cos v = -\frac{8}{17}$ og $v \in [\frac{\pi}{2},\ \pi]$. Bestem $\sin v$ og $\sin 2v$, $\cos 2v$ og $\tan 2v$.

Oppgave 4.4
I trekant ABC er vinkel $B = 82.5°$, $a = 74.0$ og $b = 92.5$

a) Finn de øvrige sidene og vinklene i trekanten.

b) Finn lengden av vinkelhalveringslinjen fra vinkel C.

Oppgave 4.5
I en trekant ABC er følgende oppgitt. Du skal regne ut alle de tre sidene og de tre vinklene.

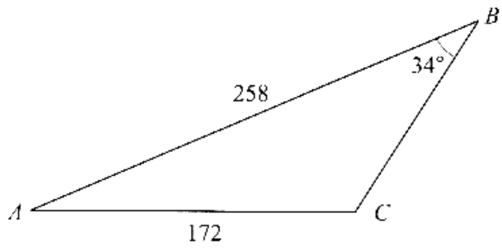
a) $a = 4{,}7$ cm, c=6,9 cm og $\angle C = 56°$.

b) $c = 7{,}2$ cm, $\angle A = 51°$ og $\angle C = 72°$

c) $\angle B = 48°$, a=8,0 cm og c= 6,3 cm

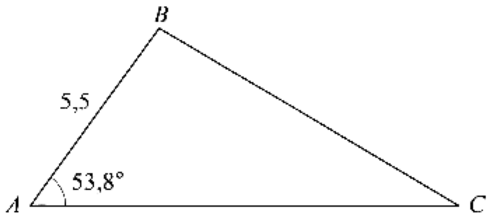
Oppgave 4.6
I trekant ABC er $|AB| = 11.9$, $|BC| = 26.4$, vinkel $C = 23.5°$, og vinkel A er stump. Bestem vinkelen A

Oppgave 4.7
Figuren viser trekant *ABC*, hvor vinkel *C* er stump. Målene fremgår av figuren.



a) Bestem vinkel *C*.
b) Bestem arealet av trekanten *ABC*.

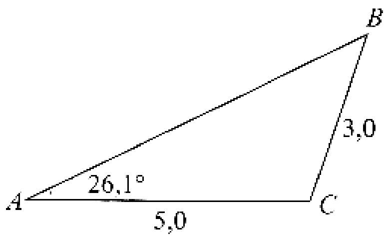
Oppgave 4.8
Figuren viser en trekant *ABC*, hvor vinkel $A = 53.8°$ og $|AB| = 5.5$. Arealet av trekanten er 24.4.
Bestem $|AC|$ og $|BC|$.



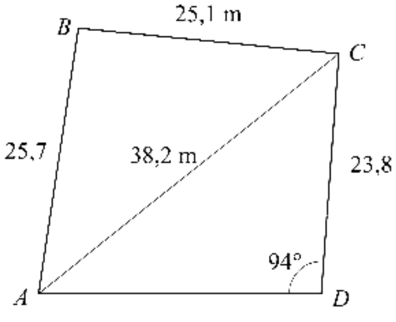
Oppgave 4.9
En byggegrunn har form som en firkant *ABCD*, hvor vinkel $A = 80°$, vinkel $B = 60°$, vinkel $C = 105°$, $|AD| = 21$ m og $|AB| = 50$ m.
a) Tegn en modell av byggegrunnen, og bestem lengden af diagonalen *BD*.
b) Bestem arealet av byggegrunnen.

Oppgave 4.10
En trekant *ABC* er bestemt ved at $a = 9$, $b = 12$ og $c = 10$.
a) Bestem størrelsen av vinkel *A*.
b) Bestem arealet av trekant *ABC*.

Oppgave 4.11
I trekant *ABC* er vinkel $A = 26.1°$, $|AC| = 5.0$ og $|BC| = 3.0$. Vinkel *C* er stump.
a) Bestem vinklene *B* og *C*.
b) Bestem $|AB|$.
c) Bestem lengden av medianen m_c.



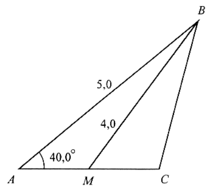
Oppgave 4.12
En byggegrunn har form som en firkant *ABCD*. Tre av sidene har følgende lengder: $|AB| = 25.7$ m , $|BC| = 25.1$ m og $|CD| = 23.8$ m. Lengden av diagonalen *AC* er målt til 38.2 m. Endelig er vinkel *D* målt til 94°.



a) Bestem vinkel *B*.
b) Bestem byggegrunnens areal.

Oppgave 4.13

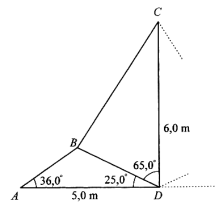
På figuren ses en trekant ABC, hvor M er midtpunktet av siden AC.
De kjente målene fremgår av figuren.
Videre opplyses det at vinkel ABM er stump.



a) Beregn vinkel ABM og $|AC|$.
b) Beregn $|BC|$ og vinkel B i trekanten ABC.
c) Beregn arealet av trekant ABC.

Oppgave 4.14

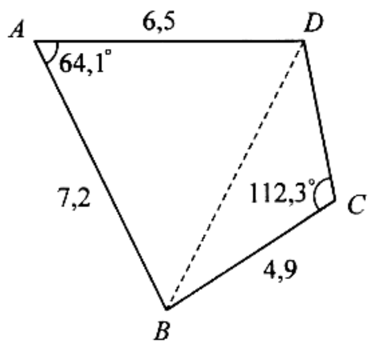
Figuren viser en skisse av en gavlkonstruksjon i et sommerhus.
De kjente målene fremgår av figuren.



a) Bestem lengden av bjelkene AB og BD.
b) Bestem lengden av bjelken BC samt vinkel BCD.

Oppgave 4.15

Figuren viser en firkant $ABCD$ hvor diagonalen BD er inntegnet.
De kjente firkantens mål fremgår av figuren.



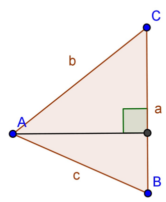
a) Beregn $|BD|$
b) Beregn vinkel D i trekant BDC.
c) Beregn $|CD|$.
d) Beregn $|AC|$.

Oppgave 4.16

Gitt trekanten på figuren til høyre.

a. Vis at $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$

b. Bruk så sinusproporsjonen til å vise at
$\sin A = \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B$



Oppgave 4.17

I trekanten ABC er AB=7 cm, BC=4 cm og AC= 6 cm.
Halveringslinjen for vinkel C deler AB i stykkene x og y. Beregn disse stykkene.
Gjenta utregningen når AB=c, BC=a og AC=b.

Oppgave 4.18

I trekanten ABC er $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$ og $AB=s$. Halveringslinjen for $\angle C$ deler AB i to stykker. Beregn disse stykkene uten å bruke tilnærmingsverdier.

Oppgave 4.19

Gitt en trekant Δ ABC med sidelengder 4, 5.5, og 8 enheter (se figuren nedenfor).
Finn vinkelen til trekanten.

Oppgave 4.20

a) Bruk grafene til sin x, cos x og tan x til å vise at:

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

b) Vis de samme sammenhengene ved hjelp av enhetssirkelen og definisjonene av sin x og cos x.

Oppgave 4.21

a) Benytt 45° + 30° = 75° til å finne eksakte verdier for sin 75° og cos 75°.

b) Benytt $45° - 30° = 15°$ til å finne eksakte verdier for sin 15° og cos 15°.

Oppgave 4.22▲

a) Tegn grafen til funksjonen: $f(x) = 24 - 22\cos(\frac{\pi}{12}x)$, $x \in [0, 24]$

Funksjonen forteller hvor høyt sola står på himmelen et sommerdøgn et sted nord for polarsirkelen. Vi kaller denne høyden over horisonten for solhøyden og måler den i grader.

b) Finn solhøyden kl. 04.00 og kl. 16.00.

c) Når var solhøyden 2°?

d) Når stod sola på det høyeste? Hvor høyt stod sola da?

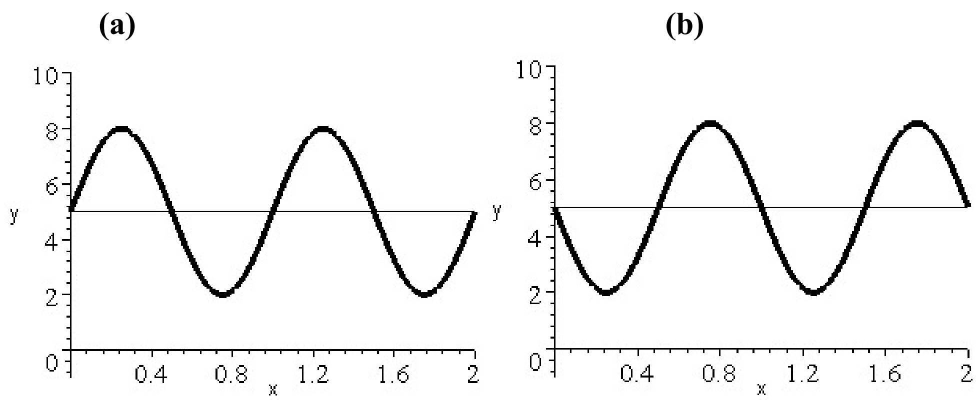
Oppgave 4.23

Skriv funksjonene nedenfor på formen $f(x) = C\cos(x - v)$:

a) $f(x) = 3\sin x - 4\cos x$ **b)** $f(x) = \cos x - \sqrt{3}\sin x$

Oppgave 4.24

Grafen til en funksjon på formen $y = c + a\sin(\omega(x - x_0))$ er gitt:



Bestem c, a, ω og x_0.

Fasit – Kapittel 4

4.1 **a)** Du kan tenke deg en rettvinklet trekant der lengden til kateten motstående for vinkelen x er $\sqrt{3}$ og hosliggende er 1, det vil si $\tan x = \sqrt{3}$. Lengden til hypotenusen er da $\sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = 2$.

Vi få da $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ og $\cos x = \dfrac{1}{2}$. Vi kan bruke samme metode for del b) og c)

b) $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ og $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $\sin x = \dfrac{5}{13}$ og $\cos x = \dfrac{12}{13}$.

4.2

a) $5\cos x - 2 = 0$

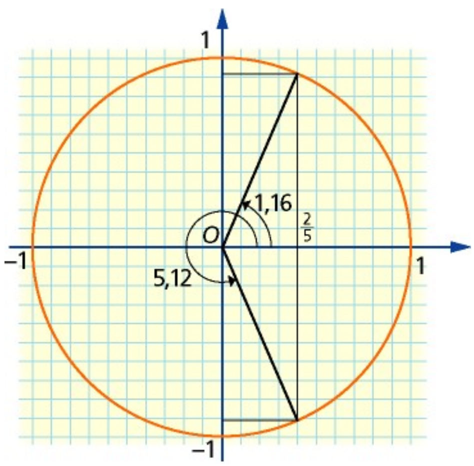
$5\cos x = 2$

$\cos x = \dfrac{2}{5}$

Vi bruker kalkulatoren og får fram den ene løsningen.

$x = 1{,}16$

Den andre løsningen finner vi ved å tegne enhetssirkelen.



$x = 2\pi - 1{,}16 = 5{,}12$

De to løsningene på ligningen er

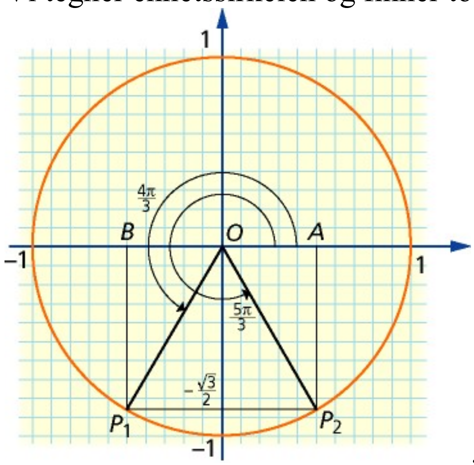
$\underline{x = 1{,}16 \text{ og } x = 5{,}12}$

b) $2\sin x + \sqrt{3} = 0,\ x \in [0,\ 2\pi >$

$$2\sin x = -\sqrt{3}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vi tegner enhetssirkelen og finner to løsninger.



.

Vi får to 30-60-90-trekanter der $\angle AOP_2 = \frac{\pi}{3}$ og $\angle BOP_1 = \frac{\pi}{3}$.

Av symmetrigrunner får vi da løsningene: $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ og $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$.

De to løsningene på ligningen er

$$\underline{x = \frac{4\pi}{3} \text{ eller } x = \frac{5\pi}{3}}$$

c) $4\tan x + 11 = 2,\ x \in [0,\ 2\pi >$

$$4\tan x = 2 - 11$$

$$\tan x = -\frac{9}{4}$$

Kalkulatoren gir løsningen

$$x = -1{,}15$$

Den generelle løsningen er da

$$x = -1{,}15 + n \cdot \pi$$

Ettersom løsningen skal være i første omløp, må $x \in [0,\ 2\pi >$.

$n = 1 \Rightarrow x = -1{,}15 + 1 \cdot 3{,}14 = 1{,}99$

$n = 2 \Rightarrow x = -1{,}15 + 2 \cdot 3{,}14 = 5{,}13$

Løsningene er da : $\underline{x = 1{,}99 \text{ og } x = 5{,}13}$

4.3

a) $\cos v = \frac{7}{25}$ og $v \in [270°, 360°]$

Enhetsformelen gir $\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ eller $\sin^2 v = 1 - \cos^2 v$

$$\sin^2 v = 1 - \left(\frac{7}{25}\right)^2 = 1 - \frac{49}{625} = \frac{576}{625} \qquad \sin v = \pm\frac{24}{25}$$

Ettersom $v = [270°, 360°]$, er sin v negativ. Det gir $\underline{\sin v = -\frac{24}{25}}$

Definisjonen av tan v gir

$$\tan v = \frac{\sin v}{\cos v} = \frac{-\frac{24}{25}}{\frac{7}{25}} = \frac{-\frac{24}{\cancel{25}} \cdot \cancel{25}}{\frac{7}{\cancel{25}} \cdot \cancel{25}} = \underline{-\frac{24}{7}}$$

b) $2\cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) - 4\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\left(\cos x \cdot \cos\frac{2\pi}{3} - \sin x \cdot \sin\frac{2\pi}{3}\right) - 4\left(\sin x \cdot \cos\frac{\pi}{6} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\left(\cos x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \sin x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) - 4\left(\sin x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3} - \cos x \cdot \frac{1}{2}\right)$

$= -\cos x - \sqrt{3}\sin x - 2\sqrt{3}\sin x + 2\cos x$

$= \underline{\cos x - 3\sqrt{3}\sin x}$

c) $\cos v = -\frac{8}{17}$ og $v \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$ eller $\sin^2 v = 1 - \cos^2 v$

$$\sin^2 v = 1 - \left(-\frac{8}{17}\right)^2 = 1 - \frac{64}{289} = \frac{225}{289}$$

$\sin v = \pm\frac{15}{17}$ Ettersom $v = [\frac{\pi}{2}, \pi]$, er sin v positiv. Det gir

$\underline{\sin v = \frac{15}{17}}$

$$\sin 2v = 2\sin v \cdot \cos v = 2\,\frac{15}{17} \cdot \left(-\frac{8}{17}\right) = \underline{-\frac{240}{289}}$$

$$\cos 2v = 1 - 2\sin^2 v = 1 - 2\left(\frac{15}{17}\right)^2 = 1 - \frac{2 \cdot 225}{289} = \underline{-\frac{161}{289}}$$

$$\tan 2v = \frac{\sin 2v}{\cos 2v} = \frac{-\frac{240}{289}}{-\frac{161}{289}} = \underline{\frac{240}{161}}$$

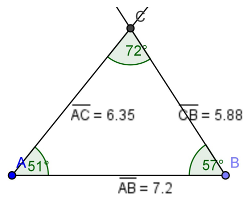
4-4 **a)** $A = 52.5°$, $C = 45.1°$, $c = 66.0$ **b)** $v_c = 76.0$

4.5

a)

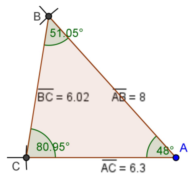
$$\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow \sin A = \frac{a \cdot \sin C}{c} = \frac{4.7}{6.9} \cdot \sin 56° = 0.5647, \quad \underline{\underline{A = 34.4°}}$$
$$\angle B = 180° - 56° - 34.4° = \underline{\underline{89.6°}}$$
$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow b = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin B = \frac{6.9\,\text{cm}}{\sin 56°} \cdot \sin 89.6° = \underline{\underline{8.3\,\text{cm}}}$$

b)



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow a = \frac{c}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{7{,}2\,\text{cm}}{\sin 72°} \cdot \sin 51° = \underline{\underline{5.88\,\text{cm}}}$$
$$B = 180° - 51° - 72° = \underline{\underline{57°}}$$
$$b = \frac{c \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{7.2\,\text{cm} \cdot \sin 57°}{\sin 72°} = \underline{\underline{6.3\,\text{cm}}}$$

c)



$$b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B} = \sqrt{8^2 + 6.3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 6.3 \cdot \cos 48°} = \underline{\underline{6.0\,\text{cm}}}$$
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin A = \frac{a \cdot \sin B}{b} = \frac{8.0 \cdot \sin 48°}{6.0} = 0.99, \quad \underline{\underline{A = 82°}}$$
$$C = 180° - 48° - 82° = \underline{\underline{50°}}$$

4.6

Sinussetningen $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ gir $b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$. Dermed blir $a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A} \cdot \cos C + \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} \cdot \cos B$. Vi dividerer denne likheten med *a* og multipliserer *sin A*: $\sin A = \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B$. Siden $\sin(B + C) = \sin(180° - B - C) = \sin A$, følger at $\sin(B + C) = \sin B \cos C + \sin C \cos B$

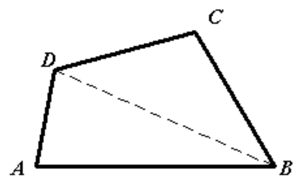
4.6 **a)** $A = 117.8°$

4.7 **a)** $C = 123°$

b) areal 8674

4.8 **a)** $|AC| = 11.0$, $|BC| = 8.9$

4.9 **a)**



$|BD| = 50.8$ m

b) $1010\ \text{m}^2$

4.10 **a)** $A = 47.2°$ **b)** areal 44.0

4.11 **a)** $B = 47.2°$, $C = 106.7°$ **b)** $|AB| = 6.5$ **c)** $m_c = 2.5$

4.12 **a)** $B = 97.5°$ **b)** 718.3

4.13 **a)** vinkel $AMB = 126.5°$, $|AC| = 2.9$

b) $|BC| = 5.1$, $B = 33.4°$ **c)** 4.66

4.14 **a)** $|AB| = 2.4$ m , $|BD| = 3.4$ m

b) $|BC| = 5.5$ m , vinkel $BCD = 33.62°$

4.15 **a)** $|BD| = 7.3$ **b)** vinkel $BDC = 38.4°$

c) $|CD| = 3.9$ **d)** $|AC| = 8.2$

4.16

a) Det er lett å vise ved hjelp av figuren $a = b \cdot \cos C + c \cdot \cos B$

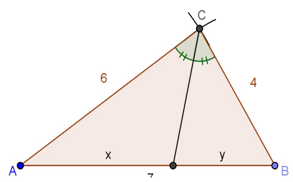
b) Det fremgår ved å dele begge sider *b*: $\dfrac{a}{b} = \cos C + \dfrac{c}{b} \cdot \cos B$

Vi vet at $\dfrac{\sin A}{a} = \dfrac{\sin B}{b} \cdot = \dfrac{\sin C \cdot}{c}$ og dermed er: $\dfrac{a}{b} \cdot = \dfrac{\sin A \cdot}{\sin B}$ og $\dfrac{c}{b} \cdot = \dfrac{\sin C \cdot}{\sin B}$.

$\dfrac{\sin A \cdot}{\sin B} = \cos C + \dfrac{\sin C}{\sin B} \cdot \cos B$. Man ganger begge sider med $\sin B$ og får svaret:

$\sin A = \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B$

4.17 Se figuren til høyre.



Ifølge setningen om delingsforhold og halveringslinje er $\dfrac{x}{y} = \dfrac{6}{4}$, vi får dermed $x = \dfrac{3}{2} y$. Vi har også $x + y = 7$.. Da må $\frac{3}{2} y + y = \frac{5}{2} y = 7$, og vi får $\underline{\underline{y = \frac{14}{5}}}$, $\underline{\underline{x = \frac{3}{2} \cdot \frac{14}{5} = \frac{21}{5}}}$.

Når *AB*=*c*, *BC*=*a* og *AC*=*b*, må $x + y = c$ og $\dfrac{x}{y} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{b}{a}$ og $x = \dfrac{b}{a} y$. Da må $\left(1 + \dfrac{b}{a}\right) y = c$

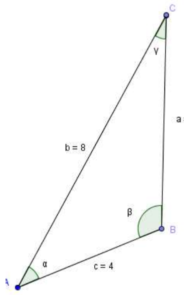
og $y = \dfrac{c}{1 + \dfrac{b}{a}} = \dfrac{a \cdot c}{a + b}$, $x = \dfrac{b \cdot c}{a + b}$.

4.18 I denne trekanten er $AB=s$, $BC=\frac{1}{2}s$, $AC=\frac{1}{2}s\sqrt{3}$. Setningen om vinkelhalveringslinjenes deling av den motstående siden i en trekant gir da

$$\frac{\sqrt{3}/2}{1/2}=\sqrt{3}=\frac{AC}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{AD}{s-AD} \text{ og herav } AD=\sqrt{3}\cdot(s-AD), \quad AD\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)=\sqrt{3}\cdot s$$

$$AD=\frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot s}{\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\underline{\underline{\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot s}} \qquad BD=AB-AD=s\cdot\left(1-\tfrac{1}{2}\cdot 3+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\underline{\underline{\tfrac{s}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}}$$

4.19

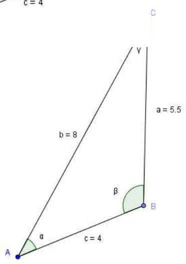


Vi setter a=5.5 , b= 8, og c= 4 , deretter finner $\angle\alpha$ vha **cosinussetningen:**

Her lønner det seg å omforme
$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$ slik at vi får $\cos\alpha$ alene på den ene siden:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{8^2+4^2-5{,}5^2}{2\cdot 8\cdot 4}=\frac{49{,}75}{64}$$

$$\alpha=\cos^{-1}(0{,}78)=38{,}74^o$$



Vi bruker sinusproporsjonen for å finne $\angle\gamma$

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\gamma}{c}\Rightarrow\sin\gamma=\frac{c\cdot\sin\alpha}{a}=\frac{4\sin(38{,}74)}{5{,}5}\approx 0{,}46$$

$$\sin\gamma\approx 0{,}46$$
$$\gamma=\sin^{-1}0{,}46\approx 27{,}4^o$$

4.20 **a)** Det fremgår ved å tegne grafene og se at disse er like.

b) Det fremgår ved å tegne enhetssirkelen og tegne inn vinklene og se at deres sin og cos er like.

4.21 **a)** $\sin 75^o=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\quad\cos 75^o=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ **b)** $\sin 15^o=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\quad\cos 15^o=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4.22 **a)** 13^o og 35^o **b)** Kl. 00.00 (kl. 24.00) **c)** Ved midnatt (00.00), kl. 06.00 og kl. 18.00. **d)** Høyeste: kl.12.00.

4.23 **a)** $C=5$, $v=\tan^{-1}\frac{3}{-4}\approx\pi-0{,}6435\approx 2{,}49$ **b)** $C=2$, $v=\tan^{-1}\frac{-\sqrt{3}}{1}\approx 2\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{5\pi}{3}$

4.24 **a)** $y=5+3\sin 2\pi x$

b) $y=5+3\sin 2\pi(x-0{,}5)$ eller $y=5-3\sin 2\pi x$

Kapittel 5 Grenseverdi og kontinuitet

5.1 Grenseverdi

La $y = f(x)$ være en funksjon som er definert om et punkt, men ikke nødvendigvis i selve $x = a$. Når variabelen x går mot punktet a, dersom funksjonen nærmer seg en verdi A, skriver man: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$

Noen regneregler for grenser

Anta at $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$. Da gjelder følgende:

- $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = A \pm B$
- $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = AB$
- $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ $\quad (B \neq 0)$

5.2 Grenseverdi $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$

I dette avsnittet skal vi se nærmere på tilfellet når $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$ og i delkapittel 4.5 når $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\infty}{\infty}$. Dersom det er mulig, kan vi faktorisere telleren og nevneren med $(x-a)$. Ellers kan L'Hôpitals regel benyttes.[9] Nedenfor følger noen eksempler.

Eksempel 5.1

Bestem grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x}}$

Fasit: **a)** 4 **b)** 2 **c)** 2 **d)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 5\cdot\dfrac{\sin 5x}{5x} = 5$ **e)** 6 **f)** 2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx} = \lim_{x\to 0}\frac{a}{b}\cdot\frac{\sin ax}{ax} = \frac{a}{b}$$

---

[9] http://www.hib.no/ansatte/ahas/forkurs/LHopitalsregel.pdf

5.3 Ensidig grense $\lim\limits_{x\to a^+}$ og $\lim\limits_{x\to a^-}$

For å undersøke kontinuitet til noen funksjoner som $f(x)=\dfrac{|x-2|}{x-2}$ eller $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2} & x\ge 2\\ x^2-4 & x<2\end{cases}$

er det nødvendig å studere grenseverdiene på høyre og venstre side.

Eksempel 5.2

Bestem grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{|x-3|}{x-3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{|x-2|}{x-2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+\dfrac{x}{|x|})$

Fasit: a**)** 1 **b)** Eksisterer ikke(± 1) **c)** Eksisterer ikke(± 1)

5.4 Kontinuitetsbegrepet

En funksjon $y=f(x)$ er kontinuerlig i punktet $x=a$ dersom grenseverdien eksisterer om dette punktet og er lik funksjonsverdien:

$$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=f(a)}$$

Eksempel 5.3

Undersøk om følgende funksjoner er kontinuerlige i det angitte punktet:

a) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x-2} & x\ge 2\\ x^2-4 & x<2\end{cases}$ i $x=2$ **b)** $g(x)=\begin{cases}\dfrac{|x-5|}{x-5} & x\ne 5\\ 1 & x=5\end{cases}$ i $x=5$

Fasit: **a)** Ja **b)** Nei (grenseverdi eksisterer ikke)

5.5 Noen ord om grenseverdi når $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_0}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^n(a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_0}{x^n})}{x^m(b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\dfrac{b_0}{x^m})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a_n}{b_m} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}$$

når grenseverdien går mot ∞, sier man at grenseverdien *ikke eksisterer*.

Eksempel 5.4

Bestem grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x-1}{x^2+2}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+7x^2-5}{x^4+2}$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-x-1}{x^4+8x}$ **d)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x+1}}{\sqrt{x+1}}$

Fasit: **a)** 1 **b)** 0 **c)** ∞ **d)** 3

5.6 Asymptoter

Asymptoter til grafen for $y=f(x)$ er rette linjer, som ikke kan skjelnes fra grafen i det fjerne. Vi skal se nærmere på tre typer asymptoter:

$y=\dfrac{x+2}{x-2}$

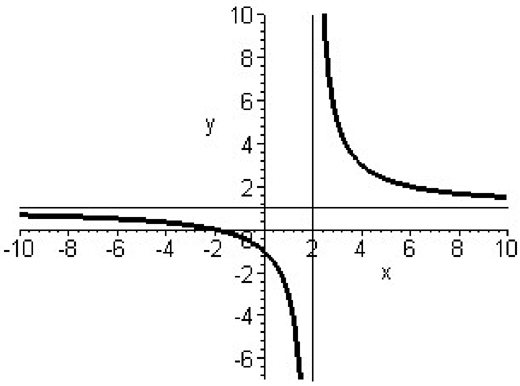
Vertikal asymptote: $x=2\Rightarrow y\to\pm\infty$

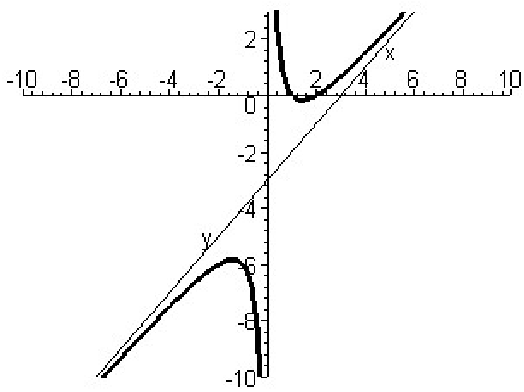
Horisontal asymptote: $x\to\infty\Rightarrow y=1$

$y=\dfrac{x^2-3x+2}{x}=x-3+\dfrac{2}{x}$

Vertikal asymptote: $x=0\Rightarrow y\to\pm\infty$

Skrå asymptote: $y=x-3$





Eksempel 5.5

Bestem eventuelle asymptoter til:

a) $y=\dfrac{x^2-5x+1}{x^2-1}$ **b)** $y=\dfrac{x-1}{|x|+3}$ **c)** $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ **d)** $y=\dfrac{x^2+|x|+1}{x}$

Fasit: **a)** $x=\pm1$, $y=1$ **b)** $y=\pm1$ **c)** $x=\pm2$, $y=0$ **d)** $x=0$, $y=x\pm1$

Eksempel 5.6

Bestem grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2}{3})^x+(\frac{3}{2})^x$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x-3}{3^x+5}$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\cdot 2^x+9}{2^x-3}$ **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n+(\frac{1}{3})^{2n}+7^{-n}$

Fasit: **a)** ∞ (Eksisterer ikke) **b)** 0 **c)** 3 **d)** 0

5.7 Tallet *e*

Tallet *e* kalles Eulers konstant (Eulertallet) etter den sveitsiske matematikeren Leonhard Euler og Napiers konstant etter den skotske matematikeren John Napier. Konstanten e ble først omtalt i 1618 i en tabell i tilleggsnotatet til et verk om logaritmer av John Napier. Selve konstanten var ikke inkludert, men en rekke naturlige logaritmer ble beregnet. Den første kjente anvendelsen av konstanten, da representert med en *b*, var i en brevveksling mellom Gottfried Leibniz og Christiaan Huygens i 1690 og 1691.

Noen mener at *e* står for "eksponentiell", siden tallet *e* er det naturlige valget til grunntall i en eksponentialfunksjon. Leonhard Euler startet å bruke bokstaven *e* om konstanten i 1727, og den ble først brukt som *e* i Eulers *Mechanica* som ble publisert i 1736 som er tilnærmet lik:

$$e \approx 2,718281\ldots$$

Oppdagelsen av konstanten i seg selv krediteres Jakob Bernoulli, som forsøkte å finne verdien til det følgende uttrykket, som kan brukes som en definisjon av *e*:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718281\ldots$$

Euler-tallet kan også uttrykkes ved: $e = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$

"Mr. Osborne, may I be excused? My brain is full."

Oppgaver – Kapittel 5

Oppgave 5.1

I) Bestem grenseverdiene: **a)** $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{x+1}$

II) For funksjonene f og g vet vi at $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$ og $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 5$. Bestem grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)+g(x)\right]$ **b)** $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)\cdot g(x)\right]$ **c)** $\lim\limits_{x\to 1}\left[f(x)\right]^2$

Oppgave 5.2

Bestem grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$ **b)** $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x-\sqrt{3}}$ **c)** $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3}$

d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^2-3x+2}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ **f)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

g) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{x^2+1}$ **h)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x+1}{x^2+1}$ **i)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x+1}{x^2+1}$

j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$ **k)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}$ **l)** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

Oppgave 5.3

Funksjonene f, g og h er gitt ved:

$$f(x) = 5x+7 \qquad g(x) = 2x^3 + x \qquad h(x) = \frac{2x}{x-2}$$

a) Vis at funksjonene f, g og h er kontinuerlige for $x = 3$.
b) Vis at funksjonene f og g er kontinuerlige for alle punkter $x = a$.
c) Hvilke krav må vi stille for at h skal være kontinuerlig i $x = a$?

Oppgave 5.4

En funksjon er definert ved:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & \text{når } x \neq 0 \\ 2 & \text{når } x = 0 \end{cases}$$

Beregn $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Er f kontinuerlig for $x = 0$?

Oppgave 5.5

Finn eventuelle vertikale asymptoter til funksjonen.

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-25}$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x+3}{x^2-5x+4}$

Oppgave 5.6
Finn eventuelle horisontale asymptoter til f når:

a) $f(x)=\dfrac{3x-10}{x}$ **b)** $f(t)=\dfrac{2t+9}{t^2-7}$

Oppgave 5.7
For hver av funksjonene skal du bestemme:

1) Nullpunktene
2) De vertikale asymptotene
3) De horisontale asymptotene

a) $f(x)=\dfrac{3x-5}{5x-4}$ **b)** $f(x)=\dfrac{x^2-7x+6}{2(x^2-5x+6)}$

Oppgave 5.8
Finn den skrå asymptoten til funksjonene:

a) $y=2x-1-\dfrac{3}{x-8}$ **b)** $y=3x-2+\dfrac{7}{8x+3}$

Oppgave 5.9
Bestem det minste leddet i uttrykket når: $n\to\infty$: $f(n)=3^n+(0,99)^n+(1,05)^{-n}$

Oppgave 5.10
Bestem grenseverdiene:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3}{4})^x+(\frac{4}{3})^x$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^x-5}{4^x+7}$ **c)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8\cdot 3^x+9}{5\cdot 3^x-7}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5^x+3^x}{7^x+2^x}$ **e)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\cdot 5^x+3^x}{7^x+2^x}$ **f)** $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{2})^n+(\frac{2}{3})^{2n}+5^{-n}$

Oppgave 5.11
En funksjon er definert ved:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{når}\quad x\neq 3\\ a & \text{når}\quad x=3\end{cases}$$

Beregn $\lim\limits_{x\to 3}f\left(x\right)$. Bestem a slik at f kontinuerlig i $x=3$

Oppgave 5.12▲

En funksjon er definert ved: $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x^2-3}{\left|x-\sqrt{3}\right|} & \text{når}\quad x\neq\sqrt{3}\\ 2\sqrt{3} & \text{når}\quad x=\sqrt{3}\end{cases}$

Beregn $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}f\left(x\right)$. Er f kontinuerlig i $x=\sqrt{3}$?

Fasit – Kapittel 5

5.1 **I) a)** 2 **b)** 1 **II) a)** 8 **b)** 15 **c)** 9

5.2 **a)** 6 **b)** $2\sqrt{3}$ **c)** 6
d) -1 **e)** 0 **f)** 1
g) 1 **h)** 0 **i)** Eksisterer ikke

j) 3 **k)** 3/2 **l)** 1

5.3 **c)** $a \neq 2$

5.4 Ja, 2.

5.5 **a)** $x = 5, x = -5$ **b)** $x = 1, x = 4$

5.6 **a)** $y = 3$ **b)** $y = 0$

5.7 **a) 1.** $x = \frac{5}{3}$ **2.** $x = \frac{4}{5}$ **3.** $y = \frac{3}{5}$

b) 1. $x = 1, x = 6$ **2.** $x = 2, x = 3$ **3.** $y = \frac{1}{2}$

5.8 **a)** $y = 2x - 1$ **b)** $y = 3x - 2$

5.9 $(1,05)^{-n}$ er det minste leddet. Grenseverdi eksisterer ikke.

5.10 **a)** Eksisterer ikke **b)** 0 **c)** $\frac{8}{5}$
d) 0 **e)** 0 **f)** 0

5.11 6 , $a = 6$

5.12 Grenseverdi eksisterer ikke ($\pm 2\sqrt{3}$):

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^+} \frac{x^2-3}{(x-\sqrt{3})} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{(x-\sqrt{3})} = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} (x+\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{3}^-} \frac{x^2-3}{-(x-\sqrt{3})} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})}{-(x-\sqrt{3})} = \lim_{x\to\sqrt{3}^+} -(x+\sqrt{3}) = -2\sqrt{3}$$

Dermed er funksjonen ikke kontinuerlig.

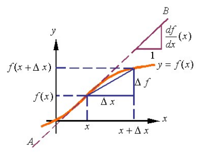
Kapittel 6 Derivasjon og funksjonsdrøfting

I anvendelsen av matematikk ønsker vi ofte å finne ut hvor raskt en størrelse er i ferd med å endre seg. Derivasjon handler om endring av en variabel i forhold til en annen variabel. I denne sammenhengen benyttes ofte begrepene *momentan hastighet* og *vekstrate*. Ved å finne den deriverte til en funksjon i et punkt på en kurve, finner du stigningstallet akkurat der, og denne kan kalles *vekstraten* for dette punktet (*momentan hastighet*).

6.1 Vekstrate

Den *gjennomsnittlige vekstraten* er definert ved forholdet mellom endringen til den avhengige variabelen og den uavhengige variabelen: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

6.2 Definisjon, vekstrate



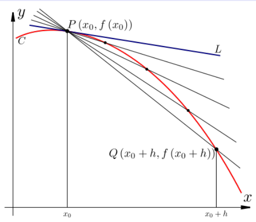
$$\boxed{y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}$$

Eksempel 6.1

Bestem den deriverte til $y = x^2$ ved hjelp av definisjonen til derivasjon.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x\,(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x = \underline{\underline{2x}}$$

6.3 Tolkninger



- Gjennomsnittsfart: $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Dette kan tolkes som stigningstallet til sekanten[10] gjennom to punkter (P og Q) på grafen til f.
På grafen er det vist noen sekanter.

- Momentan fart: $y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Dette kan tolkes som stigningstallet til tangenten [11]i et punkt (P) på grafen til f og kan beskrive hvor rask funksjonen endrer seg i dette punktet. Tangenten er vist på grafen (linjen L).

[10] Sekanten til en kurve er en rett linje som går gjennom to punkter som ligger på kurven.
[11] Tangenten til en kurve er en rett linje som berører kurven bare i ett punkt.

6.4 Derivasjonsformler og derivasjonsregler

	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	
Konstantledd	k	0	
Potensfunksjon $y = x^r$	x^r	rx^{r-1}	$r=-1 \Rightarrow (\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ $r=\frac{1}{2} \Rightarrow (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
Eksponentialfunksjon med grunntallet e	e^x	e^x	$(e^{kx})' = ke^{kx}$
Eksponentialfunksjon med grunntallet a $y = a^x$	a^x	$a^x \ln a$	
Logaritmefunksjoner	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(\log x)' = \frac{1}{x \cdot \ln 10}$

Den deriverte til absoluttverdifunksjonen:

$$f(x) = |x| \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{|x|}{x} \quad \text{for } x \neq 0$$

6.5 Viktige derivasjonsregler

Enkle regler:

$$(ay)' = ay'$$
$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$
$$(au + bv)' = au' + bv'$$

Viktige kjente regler:

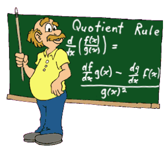
1. Produktregelen	$[u \cdot v]' = u' \cdot v + u \cdot v'$
2. Kvotientregelen	$[\frac{u}{v}]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
3. Kjerneregelen	$y = y(u(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

1. Produktregelen: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

Eksempel 6.2

$$y = x^3 \cos x \qquad y' = 3x^2 \cos x + x^3(-\sin x) = \underline{\underline{x^2(3\cos x - x \sin x)}}$$

2. Kvotientregelen: $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$



Eksempel 6.3

$$y = \frac{\cos x}{x} \Rightarrow \quad y' = \frac{(-\sin x)x - 1(\cos x)}{x^2} = \underline{\underline{-\frac{x \sin x + \cos x}{x^2}}}$$

3. Kjerneregelen:

$$y = y(u(x)) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Eksempel 6.4

$$y = \ln(\cos x) \overset{u=\cos x}{\Rightarrow} y = \ln(u) \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \underline{\underline{-\tan x}}$$

Eksempel 6.5

Bestem $\frac{d}{dx}(\sin 2x)$ og $\frac{d}{dt}(k\cos \omega t)$

$$\frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x \qquad \frac{d}{dt}(k\cos \omega t) = -k\omega \sin \omega t$$

6.6 Den deriverte til a^x og x^r

Formel	Generell (kjerneregelen)	Eksempel
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	$(e^{3x})' = 3e^{3x}$
$(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$	$(u^r)' = r \cdot u^{r-1} \cdot u'$	$\left[(x^2+1)^3\right]' = 3\cdot(x^2+1)^2 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^2$

Den deriverte til a^x: $\boxed{(a^x)' = \ln a \cdot a^x}$

Vi kan først omskrive uttrykket: $a^x = e^{\ln a \cdot x}$

Husk at: $(a^x)' = (e^{\ln a\cdot x})' = \ln a \cdot e^{\ln a \cdot x} = \ln a \cdot a^x$

Eksempel 6.6

Deriver:

a) $y = (\cos x)^7$ **b)** $y = (2 + x^5)^9$ **c)** $y = 3e^{7x}$ **d)** $y = \pi^x$ **e)** $y = k \cdot 5^x$

Fasit **a)** $y' = -7\cos^6 x \sin x$ **b)** $y' = 45x^4(2 + x^5)^8$ **c)** $y' = 21e^{7x}$
d) $y' = \pi^x \ln \pi$ **e)** $y' = k \cdot 5^x \ln 5$

6.7 Den deriverte med hensyn til x: $\dfrac{d}{dx}$

Uttrykket $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ kan oppfattes som den deriverte til f med hensyn til x:

$$y' = f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Kjerneregelen kan formuleres slik:

$$\boxed{dv \quad d}$$

Eksempel 6.7

Bestem $\dfrac{d}{dr}(\dfrac{4}{3}\pi r^3)$

Løsning: $\dfrac{d}{dr}(\dfrac{4}{3}\pi r^3) = 4\pi r^2$

Eksempel 6.8

Bestem $\dfrac{d}{dt}(\dfrac{4}{3}\pi r^3)$ når radien forandrer seg med tiden.

$\dfrac{d}{dt}(\dfrac{4}{3}\pi r^3) = 4\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$ (kjerneregelen)

Eksempel 6.8 kan også formuleres:

Bestem endringshastigheten til volumet til en kule gitt ved $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$ der radien r forandrer seg med tiden.

Løsning: $V = V(r(t))$ kjerneregelen: $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dr}\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{4}{3}\pi(3r^2)\dfrac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \dfrac{dr}{dt}$.

Det vil si at volumendringen pr. tid avhenger av kulens overflateareal $S = 4\pi r^2$

Eksempel 6.9

Gitt funksjonen: $f(x) = x^3 - 3x$.

a) Bestem $f'(x)$ og avgjør hvor funksjonen avtar og hvor den vokser.
b) Bestem $f''(x)$ og avgjør hvor funksjonen krummer oppover og hvor den krummer nedover.
c) Tegn grafen til denne funksjonen.

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

x	$-\infty$	-1	1
$f'(x)$	+ + + + + + + + 0	− − − − − 0	+ + + + +
$f(x)$	Øker ↘	Synker ↗	Øker ↘
	Maks. pkt.	Min. pkt.	

$x = -1$ er maksimumspunkt og 2 er maksimumsverdi ($f(-1) = 2$).
$x = 1$ er minimumspunkt og 2 er minimumsverdi ($f(1) = -2$).

b)
$f''(x) = 6x$
$f''(x) = 6x = 0 \Rightarrow x = 0$

Vendepunkt: (0 , 0)

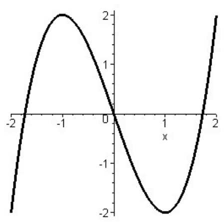
x	$-\infty$	0
$f''(x)$	− − − − − − − − 0	+ + + + +
$f(x)$	Krummer nedover $\cap$	Krummer oppover $\cup$
	Maks. pkt.	Min. pkt.

c) Grafen til $f(x) = x^3 - 3x$

Nullpunktene:
$x^3 - 3x = 0$

$x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$

c) Grafen:



6.8 Oversikt over derivasjonsformler og -regler

$y = f(x)$	$y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$	**Kjerneregelen**	*Eksempel*
k	0		
x^n	nx^{n-1}	$\left(u^n\right)' = n\cdot u^{n-1}\cdot u'$	$\left((\sin x)^5\right)' = 5\cdot(\sin x)^4\cdot\cos x$
$\lvert x\rvert$	$\dfrac{\lvert x\rvert}{x} \quad x\neq 0$		
e^x	e^x	$\left(e^u\right)' = e^u\cdot u'$	$\left(e^{kx}\right)' = ke^{kx}$
a^x	$a^x\ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u\cdot\ln a\cdot u'$	
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u}\cdot u'$	$(\ln(ax+b))' = \dfrac{a}{ax+b}$
$\sin x$	$\cos x$	$(\sin u)' = \cos u\cdot u'$	$(\sin(ax+b))' = a\cos(ax+b)$
$\cos x$	$-\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u\cdot u'$	$(\cos(ax+b))' = -a\sin(ax+b)$
$\tan x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$(\tan u)' = \dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u' = \left(1+\tan^2 u\right)\cdot u'$	$(\tan(ax+b))' = \dfrac{a}{\cos^2(ax+b)}$

6.9 Derivert, annenderivert og funksjonsdrøfting
Monotoniegenskapene

La $y = f(x)$ være en funksjon definert i intervallet I.

- $f'(x) \geq 0$ i intervallet I $\Rightarrow$ $f(x)$ er *voksende* i intervallet I
- $f'(x) > 0$ i intervallet I $\Rightarrow$ $f(x)$ er *strengt voksende* i intervallet I
- $f'(x) \leq 0$ i intervallet I $\Rightarrow$ $f(x)$ er *avtagende* i intervallet I
- $f'(x) < 0$ i intervallet I $\Rightarrow$ $f(x)$ er *strengt avtagende* i intervallet I

For å finne de enkelte intervallene der funksjonen er voksende eller avtagende, kan det være nyttig å gjøre bruk av et fortegnsskjema:

X	$-\infty$	x_1	x_2
$f'(x)$	$- - - - -$ 0	$+ + + + + + + +$ 0	$- - - - -$
$f(x)$	Synker ↘	Øker ↗	Synker ↘
	Min. pkt.	Maks. pkt.	

Av fortegnet til $f'(x)$ kan vi bestemme de lokale ekstremalpunktene. Dersom funksjonen er definert i et lukket intervall, bør eksistensen av eventuelle absolutte og lokale ekstremalpunkter undersøkes.

6.10 Maksimum og minimum

Ekstrempunkt:

La $x = c$ være et ekstrempunkt for f. Hvis c ligger i definisjonsmengden til f og $f'(c)$ eksisterer, er $f'(c) = 0$.

Bemerk at $x = c$ kan være et ekstrempunkt uten at $f'(c) = 0$.
(globalt maksimum/minimum)

- **Eksistens av maksimums- og minimumspunkt**

La f være definert og kontinuerlig i et lukket intervall $[a\,,b]$.
Da finnes det både et maksimumspunkt og et minimumspunkt i dette intervallet.

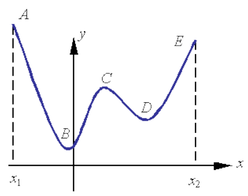
- **Karakterisering av ekstrempunkt**

La $y = f(x)$ være definert og kontinuerlig i et begrenset lukket intervall $[x_1\ ,x_2]$.

1. Finn de punktene der $f'(x) = 0$ og bestem funksjonsverdien der $f'(x) = 0$
2. Angi de endepunktene der f er definert. Bestem funksjonsverdien i endepunktene.
3. Finn de punktene i intervallet der den deriverte ikke eksisterer.

(For eksempel: den deriverte til $f(x) = |x|$ er $f'(x) = \dfrac{x}{|x|}$. $f'(x)$ eksisterer ikke i $x = 0$)

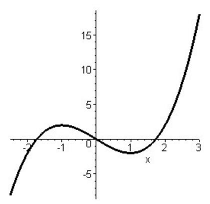
Sammenlign disse verdiene for å bestemme eventuelle LOKALE /GLOBALE maksimums- og minimumspunkter.



A er globalt maksimumspunkt,
B er globalt minimumspunkt,
C og E er lokale maksimumspunkter,
D er lokalt minimumspunkt.

Eksempel 6.10

Betrakt funksjonen $f(x) = x^3 - 3x$, $-2{,}5 \le x \le 3$
Bestem eventuelle ekstremalpunkt(er).



I eksempel 6.9 fant vi at:

$x = -1$ er maksimumspunkt og 2 er maksimumsverdi($f(-1) = 2$).
$x = 1$ er minimumspunkt og 2 er minimumsverdi ($f(1) = -2$).

$f(-2{,}5) = -8{,}125$ $\qquad f(3) = 18$
$x = -2{,}5$ globalt minimumspunkt (global minimumsverdi er $f(-2{,}5) = 8{,}125$)
$x = -1$ lokalt minimumspunkt (lokal maksimumsverdi er $f(-1) = 2$)

$x=1$ lokalt minimumspunkt (lokal minimumsverdi er $f(1)=-2$)
$x=3$ globalt minimumspunkt (global maksimumsverdi er $f(3)=18$)

Metode for funksjonsdrøftning

1) Bestem eventuelle nullpunkter og skjæringspunkter med aksene.
2) Bestem eventuelle asymptoter.
3) Finn $f'(x)$. Finn eventuelle nullpunkter til $f'(x)$ (ekstrempunkter) og sett opp fortegnsskjema.
4) Finn $f''(x)$. Finn eventuelle nullpunkter til $f''(x)$ (vendepunkter).

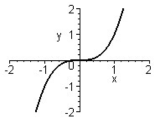
Den andrederiverte (krumning og vendepunkt)

$f''(x)$ kalles den andrederiverte til *f*: $f''(x)=\dfrac{d^2f}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}(\dfrac{df}{dx})$ (Leibniz-notasjon)

La *f* være en dobbel deriverbar funksjon i $x=a$. Dersom $x=a$ er et *vendepunkt*, er $f''(x)=0$.

X	x_1		x_2
$f''(x)$	$- - - - -$ 0	$++++++++$ 0	$- - - - - -$
$f(x)$	Krumning nedover $\cap$	Krumning oppover $\cup$	Krumning nedover $\cap$
	Vendepkt.		Vendepkt.

Eksempel 6.11



Vis at $f(x)=x^3$ har ett vendepunkt.
Grafen er vist her.
$f'(x)=3x^2\geq 0$ (krummer oppover)
$f'(x)=6x=0\Rightarrow x=0$ $(0,0)$ er vendepunktet.

6.11 Ligningen til tangenten og linearisering

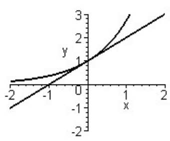
Ligningen til tangenten for en funksjon $y=f(x)$ i et punkt $x=a$ som ligger på grafen er:

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

Det å linearisere en deriverbar funksjon i et punkt $x=a$ er å bruke tangentlinjen til funksjonen i dette punktet:

$$f(x)\approx f(a)+f'(a)(x-a)$$

Eksempel 6.12



Bestem ligningen til tangentlinjen i det gitte punktet og lineariser funksjonene.

a) $f(x) = \sin x$ i $x = 0$ **b)** $f(x) = e^x$ i $x = 0$

Grafen til funksjonen og tangenten for del b) er tegnet her:

Fasit **a)** $y = x$ **b)** $y = x + 1$

- **Tilvekstformelen**

Vi tar utgangspunkt i lineariseringne av $y = f(x)$: $f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$.

Eller $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)(x + \Delta x - x)$

Dette kan omskrives som

$$\boxed{f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x}$$

Eksempel 6.13

Bestem hvor mye volumet til en kule vokser hvis radien øker fra 10 til 10,1 cm og fra 10 til 10,01 cm. Volumet til en kule med radien r er gitt ved: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Ved å anvende tilvekstformelen for å bestemme en tilnærmet verdi for volumendringen:

$\Delta V \approx \frac{dV}{dr} \cdot \Delta r$ og derivere formelen for volumet av en kule med hensyn på r får vi:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\pi r^2$$

$\Delta V = 4\pi r^2 \cdot \Delta r = 4\pi(10)^2 \cdot 0{,}1 = \underline{\underline{125{,}7}}\ \text{cm}^3$	$\Delta V = 4\pi r^2 \cdot \Delta r = 4\pi(10)^2 \cdot 0{,}01 = \underline{\underline{12{,}57}}\ \text{cm}^3$

Vi kunne eventuelt regne ut den eksakte endringen ved:

$$\Delta V = V_2 . - V_1 = \frac{4\pi}{3}(r_2^3 - r_1^3) \cdot = \frac{4\pi}{3}(10{,}1^3 - 10^3) = \underline{\underline{126{,}9}}\ \text{cm}^3$$

$$\Delta V = V_2 . - V_1 = \frac{4\pi}{3}(r_2^3 - r_1^3) \cdot = \frac{4\pi}{3}(10{,}01^3 - 10^3) = \underline{\underline{12{,}58}}\ \text{cm}^3$$

Dette eksempelet bekrefter at jo mindre Δr blir , jo mer nøyaktig blir svaret fra tilvekstformelen.

Oppgaver – Kapittel 6

Oppgave 6.1
Deriver funksjonene.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 5$ **b)** $g(x) = 3x^2 + 5x - 2$

Oppgave 6.2
Deriver funksjonene.

a) $f(x) = x^{1,2}$ **b)** $f(x) = 2x + 3x^{2,5}$

Oppgave 6.3
Deriver uttrykkene med hensyn til x.

a) $x + \frac{1}{x}$ **b)** $x^2 + \frac{1}{x^2}$ **c)** $x + \sqrt{x}$

Oppgave 6.4
Deriver funksjonene.

a) $f(x) = (2x-3)^3$ **b)** $f(x) = (x^2+1)^2$ **c)** $f(x) = (x^3+5x)^2$

Oppgave 6.5
Deriver funksjonene ved hjelp av produktregelen.

a) $f(x) = x^2(x^4 + x)$ **b)** $f(x) = (x^2+1)\cos x$

Oppgave 6.6
Bestem $y' = \frac{dy}{dx}$ når

a) $y = x^5 + 2x + 7$ **b)** $y = 5x + 2\cos x + 1$ **c)** $y = \frac{\sin x}{x}$

d) $y = (x^3+1)\sin x$ **e)** $y = \frac{\cos x}{x^3}$ **f)** $y = \frac{x+1}{3x+1}$

g) $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x}$ **h)** $y = \frac{1}{x^2+1}$ **i)** $y = (2x+5)^{100}$

j) $y = \sqrt{x^3 - 2x}$ **k)** $y = \frac{x^2-3}{x^2+1}$ **l)** $y = (x^3+5x)^{\frac{1}{4}}$

m) $y = \sqrt[4]{x^3 + 5x}$ **n)** $y = x^2 \ln x$ **o)** $y = \frac{\cos 2x}{x}$

Oppgave 6.7
Bestem $y' = \frac{dy}{dx}$ når **a)** $y = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ **b)** $y = \sqrt{x}\cos x$

Oppgave 6.8
Deriver funksjonene.

a) $f(x) = 3x^5 - 4x + 5$ **b)** $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ **c)** $y = (x^3 - x + 1)^{15}$

Oppgave 6.9

a) Bestem vekstfarten for funksjonen: $f(x) = x^5 - 4x^2 + 3$ i et punkt med $x = -1$.

b) Bestem tangentlinjen til funksjonen: $g(x) = x^3 - 2x + 3$ i et punkt med $x = -1$ som ligger på kurven til funksjonen.

Oppgave 6.10

a) Bestem eventuelle topp- eller bunnpunkter til funksjonen: $y = x^3 - 12x + 12$
Bestem vendepunktet.

b) Bestem eventuelle topp- eller bunnpunkter til funksjonen: $y = x^3 - 6x^2 + 4$
Bestem vendepunktet.

Oppgave 6.11▲
Finn y' når:

a) $y = \frac{x^2 + 3x - 2}{\sqrt[3]{x}}$ **b)** $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^3$ **c)** $y = \sqrt[3]{x^3 - 5x - 3}$

d) Bruk formelen $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ til å bestemme den deriverte av $f(x) = \frac{1}{x+2}$

Oppgave 6.12
Bestem eventuelle grenseverdier:

a) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^3 - 64}{x - 4}$ **b)** $\lim\limits_{x \to -3} \frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{x + 3}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 9} \frac{x - 3}{|x - 3|}$

Oppgave 6.13

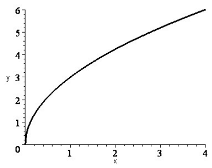
a) Gitt funksjonen $f(x) = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$. Bestem $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ og $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) Vis at $f'(x) = 2\left(1 - x^2\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$ og $f''(x) = 2x\left(x^2 - 3\right)e^{-\frac{x^2}{2}}$

c) Bestem eventuelle nullpunkter, ekstremalpunkter og vendepunkter.

Oppgave 6.14

Et kurvestykke $f(x) = 3\sqrt{x} \quad 0 \le x \le 4$ er gitt. Punktet $P_1\,(a, f(a))$ ligger på kurven.



1) Finn ligningen for tangenten ved dette punktet P_1.

2) Denne tangenten skjærer x-aksen ved punktet P_2. Finn koordinatene til P_2.

Oppgave 6.15

En funksjon $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$, $x \in \langle 0, 10]$ er gitt.

a) Bestem eventuelle ekstremalpunkter på kurven.

b) Bestem det punktet på kurven hvor avstanden mellom kurven og punktet $(0\,,-1)$ er minst mulig.

Oppgave 6.16

En kuleformet snøball smelter med en konstant fart på $3\,\dfrac{\text{mm}^3}{\text{min}}$ og kuleformen beholdes hele tiden. Hvor fort avtar radien av snøballen i det øyeblikket radien er lik 6 mm? Hvor fort avtar overflaten av snøballen i det samme tidspunktet?

Oppgave 6.17

Ligningen til en funksjon er gitt:

$$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10 \;\; ; \;\; x \in [-5, 5]$$

Bestem:

a) Området hvor funksjonen avtar og øker
b) Ekstremalverdier
c) Eventuelle vendepunkter og konkaviteten
d) Skisser kurven.

Oppgave 6.18

Ligningen til en funksjon er gitt: $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$

Bestem:

a) Ekstremalverdier
b) Området hvor funksjonen vokser og avtar
c) Eventuelle vendepunkter og konkaviteten
d) Skisser grafen.

Fasit – Kapittel 6

6.1 **a)** $2x-2$ **b)** $6x+5$

6.2 **a)** $1,2x^{0,2}$ **b)** $2+7,5x^{1,5}$

6.3 **a)** $1-\frac{1}{x^2}$ **b)** $2x-\frac{2}{x^3}$ **c)** $1+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

6.4 **a)** $6(2x-3)^2$ **b)** $4x(x^2+1)$ **c)** $2(x^3+5x)(3x^2+5)$

6.5 **a)** $6x^5+3x^2$ **b)** $f(x)=2x\cos x-(x^2+1)\sin x$

6.6 **a)** $5x^4+2$ **b)** $5-2\sin x$ **c)** $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$

d) $3x^2\sin x+(x^3+1)\cos x$ **e)** $-\frac{x\sin x+3\cos x}{x^4}$ **f)** $-\frac{2}{(3x+1)^2}$

g) $\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{x^2}$ **h)** $-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$ **i)** $200(2x+5)^{99}$

j) $\frac{3x^2-2}{2\sqrt{x^3-2x}}$ **k)** $\frac{8x}{(x^2+1)^2}$ **l)** $\frac{3x^2+5}{4\sqrt[4]{(x^3+5x)^3}}$

m) $\frac{3x^2+5}{4\sqrt[4]{(x^3+5x)^3}}$ **n)** $x(2\ln x+1)$ **o)** $-\frac{2x\sin 2x+\cos 2x}{x^2}$

6.7 **a)** $y=\dfrac{\cos x\cdot\sqrt{x}-\sin x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\underline{\underline{\dfrac{2x\cos x-\sin x}{2x\sqrt{x}}}}$

b) $y=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cos x-\sqrt{x}\sin x\cdot=\underline{\underline{\dfrac{\cos x-2x\sin x}{2\sqrt{x}}}}$

6.8 **a)** $f'(x)=15x^4-4$ **b)** $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}$

c) $y=15(x^3-x+1)^{14}(3x^2-1)$

6.9 **a)** $f'(x)=5x^4-8x$ og dermed er vekstfart i $x=-1$: $f'(-1)=13$.

b) Ligningen til tangenten i $x=a$: $f(x)-f(a)=f'(a)(x-a)$

$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Rightarrow y-4=x+1\Rightarrow y=x+5$

$f'(x)=3x^2-2 \quad ,f'(-1)=1$

6.10 **a)** Topp- og bunnpunkt: $(-2\,,28)$ $(2\,,-4)$ og vendepunkt: $(0\,,12)$
b) Topp- og bunnpunkt: $(0\,,4)$ $(4\,,-28)$ og vendepunkt: $(2\,,-12)$

6.11

a) $y=\dfrac{x^2+3x-2}{\sqrt[3]{x}}=x^{2-\frac{1}{3}}+3x^{1-\frac{1}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}=x^{\frac{5}{3}}+2x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{-1}{3}}$

$$\underline{\underline{y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}+2x^{\frac{-1}{3}}+\frac{2}{3}x^{\frac{-4}{3}}}}$$

b) $y=\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}+x^3=x^{\frac{-1}{5}}+x^{\frac{-1}{3}}+x^3\Rightarrow \underline{\underline{y'=-\dfrac{1}{5}x^{\frac{-6}{5}}-\dfrac{1}{3}x^{\frac{-4}{3}}+3x^2}}$

c) $y=\sqrt[3]{x^3-5x-3}=(x^3-5x-3)^{\frac{1}{3}}\Rightarrow y'=\dfrac{1}{3}(x^3-5x-3)^{\frac{-2}{3}}(3x^2-5)=\underline{\underline{\dfrac{(3x^2-5)}{3(x^3-5x-3)^{\frac{2}{3}}}}}$

d) $f(x)=\dfrac{1}{x+2}$ $\qquad f(x+\Delta x)=\dfrac{1}{x+\Delta x+2}$ $\qquad f(x+\Delta x)-f(x)=\dfrac{1}{x+\Delta x+2}-\dfrac{1}{x+2}$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+2-x-\Delta x-2}{\Delta x(x+\Delta x+2)(x+2)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x+2)(x+2)}=\underline{\underline{\frac{-1}{(x+2)(x+2)}}}$$

6.12 Bemerk at man kan også bruke L'Hopitals regel.[12]

$$a)\ \lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x-4}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{x-4}=\lim_{x\to 4}(x^2+4x+16)=16+16+16=\underline{\underline{48}}$$

$$b)\ \lim_{x\to -3}\frac{x^3+2x^2-3x}{x+3}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to -3}\frac{x(x^2+2x-3)}{x+3}=\lim_{x\to -3}\frac{x(x+3)(x-1)}{x+3}=\lim_{x\to -3}x(x-1)=\underline{\underline{12}}$$

$$c)\ \lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

$$d)\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{|x-3|}=\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to 3^+}\frac{x-3}{(x-3)}=1\\ \displaystyle\lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{-(x-3)}=-1\end{cases}$$ Dermed grenseverdi eksisterer ikke

6.13 **a)** 0 **,** ∞ (ingen grenseverdi) **b)** Nullpunkt $(0\,,0)$ ekstremalpunkter $(1\,,\dfrac{2}{\sqrt{e}})$ og $(-1\,,-\dfrac{2}{\sqrt{e}})$, vendepunkter $(0\,,0)$ $(\sqrt{3}\,,\dfrac{2\sqrt{3}}{e\sqrt{e}})$ og $(-\sqrt{3}\,,\dfrac{-2\sqrt{3}}{e\sqrt{e}})$

6.14 **1)** $f(x)=3\sqrt{x}$ $\qquad f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

$$y-3\sqrt{a}=\frac{3}{2\sqrt{a}}(x-a)\quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{y=\frac{3}{2\sqrt{a}}x+\frac{3}{2}\sqrt{a}}}$$

2) $y=0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{3}{2\sqrt{a}}x+\dfrac{3}{2}\sqrt{a}=0 \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{x=-a}}$ $\quad,\ (-a\,,0)$

[12] http://home.hib.no/ansatte/ahas/forkurs/LHopitalsregel.pdf

6.15

a) $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x}$; $x \in \langle 0,10]$; $y = x - 1 + \dfrac{1}{x} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = 1 - 0 - \dfrac{1}{x^2} = 0$; dette gir $x = 1$

y har absolutt minimum ved $x = 1$. Kontroll vha fortegnskjema.

b) avstand $S = \sqrt{(a-0)^2 + (\dfrac{a^2 - a + 1}{a} + 1)^2} = \sqrt{(a)^2 + (a - 1 + \dfrac{1}{a} + 1)^2} = \sqrt{(a)^2 + (a + \dfrac{1}{a})^2}$

$$\frac{dS}{da} = \frac{1}{2}\left(a^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2a + 2\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\right) = 0 \Rightarrow \frac{\left(2a + 2\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)\right)}{2\cdot\left(a^2 + \left(a + \frac{1}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$a + a - \frac{1}{a} + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^3} = 0 \Rightarrow 2a - \frac{1}{a^3} = 0 \Rightarrow 2a^4 - 1 = 0 \Rightarrow a^4 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{8}$$

Avstanden er minst ved $\underline{\underline{a = \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{8}}}$

6.16

$O(t) = 4\pi \cdot r^2 \qquad \dfrac{dO}{dt} = 8\pi \cdot r \cdot \dfrac{dr}{dt}$

$$\left[\frac{dO}{dt}\right]_{r=6\text{ mm}} = -8\pi \cdot 6\text{ mm} \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{3}{36}\frac{\text{mm}}{\text{min}} = \underline{\underline{1\frac{\text{mm}^2}{\text{min}}}}$$

6.17

a)

$f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$; $x \in [-5, 5]$, $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 0 = 0$, $4x^2(x-3) = 0$

$x = 0,\ x = 3$ *vha fortegnsskjema finner vi at* f *vokser* $< 3, 5 >$ *og avtar* $< -5, 3 >$

f *har rel.* min *ved* $x = 3$.

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 0 \Rightarrow 12x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = 2$, *ved fortegnsskjema finner vi krumning oppover* $< -5, 0 >$, *krumning nedover* $< 0, 2 >$, *vendepunkt*: $(0, 10)$ $(2, -6)$

6.18

$f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$ $f'(x) = \dfrac{(x^2 - 4)2x - (x^2 + 1)2x}{(x^2 - 4)^2} = \dfrac{-10x}{(x^2 - 4)^2} = 0$, $-10x = 0$, $x = 0$

f *vokser* $< -\infty, -2 >$ *og* $< -2, 0 >$ *avtar* $< 0, 2 >$ *og* $< 2, \infty >$ *rel.* maks *ved* $x = 0$

$f''(x) = \dfrac{(x^2 - 4)^2(-10) + 10x(2(x^2 - 4)(2x))}{(x^2 - 4)^4} = \dfrac{10x^2 + 4}{(x^2 - 4)^3} = 0$, $10x^2 + 4 = 0$ *får ingen reelle verdier, dermed ingen vendepunkter. Krumning oppover* $< -\infty, -2 >$ *og* $< 2, \infty >$ *krumning nedover* $< -2, 2 >$.

Kapittel 7 Integrasjon

$$\int \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Integrand}}}{f(x)}\ dx = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Anti-deriverte til } f(x)}}{F(x)} + \overset{\substack{\text{Integrasjonskonstant} \\ \uparrow}}{C}$$

, og det gjelder: $F'(x) = f(x)$

7.1 Det bestemte integralet som areal

Arealet avgrenset av grafen til en funksjon og x-aksen i et bestemt intervall [a , b] kan beregnes ved hjelp av et bestemt integral: $\int_a^b f(x)dx$.

RIEMANN-SUM

Det bestemte integralet kan skrives som grensen til en sum. Riemann-sum handler om å summere uendelig mange uendelig små arealer. Vi skal prøve å benytte summen til arealene til mange rektangler som en god tilnærming for arealet under grafen til en begrenset kontinuerlig integrerbar funksjon. Integrasjonsintervallet [a, b] deles i n deler:

$$[x_0, x_1] \ , \ [x_1, x_2] \ , \ [x_2, x_3] \ , \ \cdots \ , \ [x_{n-1}, x_n] \quad \text{der} \quad a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Delintervallene har ikke nødvendigvis samme lengder.

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \ , \ \ i = 1, \cdots, n$

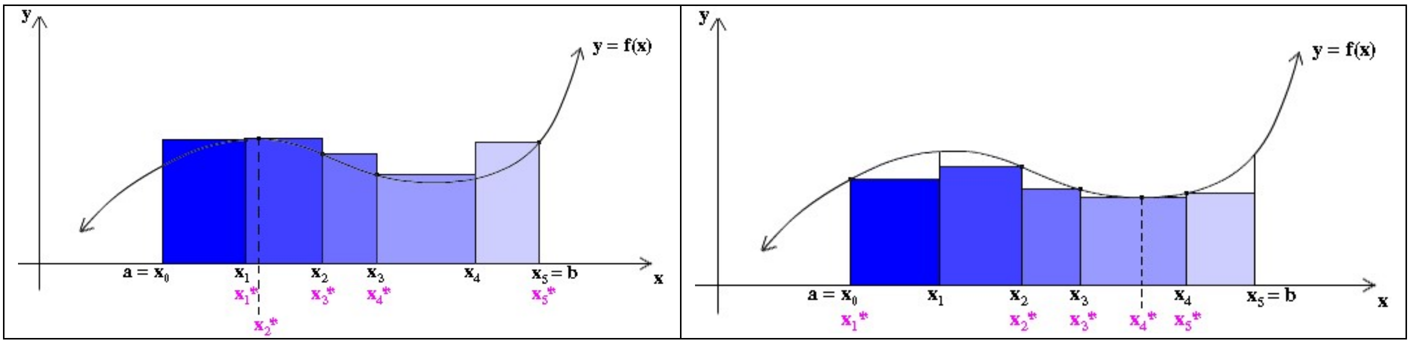
Vi kan sette opp *øvre* og *nedre* Riemann-sum henholdsvis:

$$S < S_1 = \sum_{i=1}^{n} Sup\left\{ f(x_i^*) \right\} \Delta x_i$$

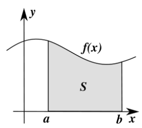
der $Sup\left\{ f(x_i^*) \right\}$ er supremum til $f(x)$ i delintervallet $[x_{i-1}, x_i]$.

$$S > S_2 = \sum_{i=1}^{n} Inf\left\{ f(x_i^*) \right\} \Delta x_i$$

der $Inf\left\{ f(x_i^*) \right\}$ er infimum til $f(x)$ i delintervallet $[x_{i-1}, x_i]$.



$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Sup\left\{ f(x_i^*) \right\} \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Inf\left\{ f(x_i^*) \right\} \Delta x_i$$



Når denne grenseverdien eksisterer, skriver vi Riemann-summen som bestemt integral:

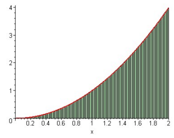
$$\boxed{S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

7.2 Det bestemte integralet

Som vist i forrige avsnitt, kan arealet avgrenset av kurven til funksjonen $y = f(x)$ og x-aksen i intervallet $a \le x \le b$ beregnes ved hjelp av det bestemte integralet:

$$A = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Eksempel 7.1



Bestem arealet avgrenset av grafen til $y = x^2$, x-aksen i intervallet $[0,2]$.

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}0^3 = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$

7.3 Det ubestemte integralet

$$\int \underset{\substack{\downarrow \\ Integrand}}{f(x)}\ dx = \underset{\substack{\downarrow \\ Anti-deriverte\ til\ f(x)}}{F(x)} + \overset{\substack{Integrasjonskonstant \\ \uparrow}}{C}$$ og da gjelder: $F'(x) = f(x)$

7.4 Integrasjonsformler

• $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1$	• $\int \cos x dx = \sin x + C$
• $\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	• $\int \sin x dx = -\cos x + C$
• $\int e^x dx = e^x + C$	• $\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$
• $\int a^x dx = \frac{1}{\ln a}a^x + C$	• $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$

7.5 Regneregler for bestemt og ubestemt integral

Noen regler for bestemt integral:	**Noen regler for ubestemt integral:**
$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big\vert_a^b = F(b) - F(a)$	$\int f(x)dx = F(x) + C$
$\int_a^a f(x)dx = 0$ $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ der $a < b < c$	Linearitetsegenskapen: $\int k\, f(x)dx = k\int f(x)dx$ der k er konstant $\int [Af(x) + Bg(x)]dx = A\int f(x)dx + B\int g(x)dx$ Uegentlig integral: $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)dx$ (se oppgave 7.6b) Hvis grensen eksisterer, konvergerer integralet, ellers er det divergent

Eksempel 7.2

$$\int (1+4x+3\sqrt{x})\,dx = x + 4(\frac{1}{2}x^2) + 3\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + C = x + 2x^2 + 3(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}) + C = \underline{\underline{x + 2x^2 + 2x\sqrt{x} + C}}$$

Eksempel 7.3

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1} = 2x^{\frac{1}{2}} + C = \underline{\underline{2\sqrt{x} + C}}$$

Eksempel 7.4

$$\int (2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})\,dx = 2x + \ln|x| + \frac{1}{-2+1}x^{-2+1} = \underline{\underline{2x + \ln|x| - \frac{1}{x} + C}}$$

I de neste to avsnittene skal vi se nærmere på to viktige integrasjonsmetoder: substitusjon og delvis integrasjon.

7.6 Integrasjon ved substitusjon

Dersom integranet er en sammensatt funksjon multiplisert med den deriverte av kjernen, kan man forenkle integralet ved å velge en hjelpevariabel *u* som funksjon av *x*. Man bestemmer *du* som funksjon av *dx* og bruker disse til å forenkle integrasjonen.

Eksempel 7.5

$$\int xe^{x^2}\,dx \underset{du=2x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{2x}du}{\overset{u=x^2}{=}} \int xe^u \frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int e^u\,du = \frac{1}{2}e^u + C = \underline{\underline{\frac{1}{2}e^{x^2} + C}}$$

Eksempel 7.6

$$\int \cos(3x)dx \underset{du=3x\,dx \Rightarrow dx=\frac{1}{3}du}{\overset{u=3x}{=}} \int \cos u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int \cos u\; du = \frac{1}{3}\sin u + C = \underline{\underline{\frac{1}{3}\sin(3x) + C}}$$

Vi kan derfor konkludere med at for en konstant *k* gjelder følgende:

$$\boxed{\int \sin(kx)\,dx =}$$

Eksempel 7.7

$$\int t(3+5t^2)^{99}dx \underset{du=10tdt \Rightarrow dt=\frac{1}{10t}du}{\overset{u=3+5t^2}{=}} \int t\,u^{99}\frac{1}{10t}du = \frac{1}{10}\int u^{99}\,du = \frac{1}{10}\frac{1}{100}u^{100}+C = \underline{\underline{\frac{1}{1000}(3+5t^2)^{100}+C}}$$

Eksempel 7.8

$$\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx \underset{du=(1-\sin x)dx}{\overset{u=x+\cos x}{=}} \int \frac{du}{u} = \ln|u|+C = \underline{\underline{\ln|x+\cos x|+C}}$$

7.7 Delvis integrasjon

Dersom integranden kan skrives om $u \cdot v'$ og det er enklere å integrere $u' \cdot v$, kan man benytte delvis integrasjon: $\int u \cdot v'dx = uv - \int u' \cdot v\,dx$

Delvis integrasjon benyttes i situasjoner som:

$\int xe^{ax}dx$, $\int x\cos ax\,dx$, $\int x\sin ax\,dx$, $\int x\ln x\,dx$, $\int \ln x\,dx$, …

Eksempel 7.9

$\int xe^{7x}dx$

$$\int \underset{\substack{\uparrow\\u\\\Downarrow}}{x}.\underset{\substack{\uparrow\\v'\\\Downarrow}}{e^{7x}}\,dx = x\cdot\frac{1}{7}e^{7x} - \int 1\cdot(\frac{1}{7}e^{7x})\,dx = \frac{1}{7}xe^{7x} - \frac{1}{7}\int e^{7x}dx = \underline{\underline{\frac{1}{7}xe^{7x} - \frac{1}{49}e^{7x}+C}}$$

$u' = 1 \quad v = \frac{1}{7}e^{7x}$

Eksempel 7.10

$\int x\cos 3xdx$

$$\int \underset{\substack{\uparrow\\u\\\Downarrow}}{x}.\underset{\substack{\uparrow\\v'\\\Downarrow}}{\cos 3x}\,dx = x\cdot(\frac{1}{3}\sin 3x) - \int 1\cdot(\frac{1}{3}\sin 3x)\,dx = \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3xdx = \underline{\underline{\frac{1}{3}x\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C}}$$

$u' = 1 \quad v = \frac{1}{3}\sin 3x$

Eksempel 7.11

$\int x\ln xdx$

$$\int \underset{\substack{\uparrow\\v'\\\Downarrow}}{x}.\underset{\substack{\uparrow\\u\\\Downarrow}}{\ln x}\,dx = \frac{1}{2}x^2\cdot\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int\frac{1}{2}xdu = \underline{\underline{\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C = \frac{1}{2}x^2(\ln x - \frac{1}{2}) + C}}$$

$v = \frac{1}{2}x^2 \quad u' = \frac{1}{x}$

7.8 Noen anvendelser av det bestemte integralet

Det bestemte integralet har mange anvendelsesområder. Det kan blant annet benyttes til å beregne:

- **Areal** (se eksempel 7.1)
- **Volum**

For eksempel når arealet avgrenset av kurven til funksjonen $y = f(x)$ og x-aksen i intervallet $a \le x \le b$ roterer om x-aksen, kan volumet til omdreiningslegemet regnes ved:

$$V = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx$$

- **Det totale forbruket**

La en funksjon $y = f(t)$ være forbruk pr. tidsenhet.
Det totale forbruket i tidsintervallet fra $t = a$ til $t = b$ kan beregnes ved:

$$F(t) = \int_a^b f(t)dt$$

- **Middelverdi** (se eksempel 7.12)

La en funksjon $y = f(x)$ være definert i intervallet $[a, b]$.
Middelverdien $\overline{y} = \overline{f(x)}$ til funksjonen for x i intervallet $[a, b]$ kan beregnes ved:

$$\overline{f(x)} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Eksempel 7.12 **Middeltemperatur**

Temperaturen i badevannet ved Norheimsund blir målt hver dag om sommeren.
I juni et år var denne temperaturen målt i celsiusgrader x dager inn i juni, og forventet gitt ved funksjonen:

$$T(x) = 13 - 4\sin(\frac{\pi}{16}(x+2)), \quad x \in [0, 30]$$

Bestem middeltemperaturen i løpet av juni i dette året.

$$\overline{T(x)} = \frac{1}{30-0} \int_0^{30} f(x)dx = \frac{1}{30} \int_0^{30} \left(13 - 4\sin(\frac{\pi}{16}(x+2)) \right) dx$$

$$= \frac{1}{30} \left[13t + 4\frac{16}{\pi}\cos(\frac{\pi}{16}(x+2)) \Big|_0^{30} \right] = \frac{1}{30} \left[390 + \frac{64}{\pi}(\cos(2\pi) - \cos\frac{\pi}{8}) \right] \approx 13,1^{o}\,\mathrm{C}$$

Oppgaver – Kapittel 7

Oppgave 7.1
Løs integralene.

a) $\int dx$

b) $\int (x+2)dx$

c) $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{x} \right) dx$

d) $\int (3\cos x + 5e^x)dx$

e) $\int (\cos 2x + 3e^{7x})dx$

f) $\int (2x-1)^{99} dx$

g) $\int x^2(x^3+2)^7\, dx$

h) $\int xe^{4x} dx$

i) $\int \cos x (2+\sin x)^8 dx$

j) $\int \frac{1}{2x+3} dx$

k) $\int \frac{1}{2x+3} dx$

l) $\int \frac{1}{(2x+3)^2} dx$

m) $\int x^5 \ln x\, dx$

n) $\int \frac{(\ln x)^5}{x} dx$

o) $\int (1+2x)^8 dx$

p) $\int x \sin x\, dx$

q) $\int x \sin 3x\, dx$

r) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx$

s) Vis ved derivasjon at $\int \frac{3x^2}{x^3+1} dx = \ln\left|x^3+1\right| + C$

Oppgave 7.2

Bestem arealet avgrenset av kurven til $f(x) = e^x + e^{-x}$, x-aksen i intervallet $[0, \ln 2]$.

Oppgave 7.3▲

a) Finn de ubestemte integralene:

1) $\int x \cdot \cos\left(x^2\right) dx$ 2) $\int x \cdot \cos x\, dx$

b) Regn ut de bestemte integralene:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left(\cos(3x) - \sin(2x)\right) dx$ 2) $\int_1^2 \frac{x}{2x^2-1} dx$

Fasit – Kapittel 7

7.1

a) $x+C$ **b)** $\frac{1}{2}x^2+2x+C$ **c)** $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}+\ln|x|+C$

d) $3\sin x+5e^x$ **e)** $\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{3}{7}e^{7x}+C$ **f)** $\frac{1}{200}(2x-1)^{100}+C$

g) $\frac{1}{24}(x^3+2)^8+C$ **h)** $\frac{1}{4}xe^{4x}-\frac{1}{16}e^{4x}+C$ **i)** $\frac{1}{9}(2+\sin x)^9+C$

j) $\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$ **k)** $\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$ **l)** $-\frac{1}{2(2x+3)}+C$

m) $\frac{1}{6}x^6\ln x-\frac{1}{36}x^6+C$ **n)** $\frac{1}{6}(\ln x)^6+C$ **o)** $\frac{1}{18}(1+2x)^9+C$

p) $-x\cos x+\sin x+C$ **q)** $-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$ **r)** $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C$

s) $\left[\ln(x^3+1)\right]'=\frac{3x^2}{x^3+1}$ **.** $\left[\ln u\right]'=\frac{u'}{u}$, $u=x^3+1$

7.2

$$\int_0^{\ln 2}\left(e^x+e^{-x}\right)dx=[e^x-e^{-x}]\Big|_0^{\ln 2}=e^{\ln 2}-e^{-\ln 2}-(e^0-e^{-0})=2-\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{3}{2}}}$$

7.3

a)

1) $\int x\cdot\cos\left(x^2\right)dx=\frac{1}{2}\sin(x^2)+\mathrm{C}$

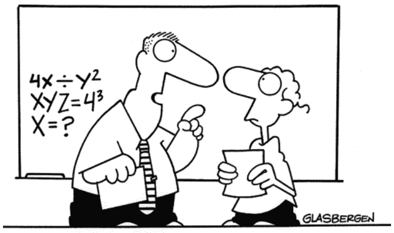
2) $\int x\cdot\cos x\,dx=x\sin x+\cos x+\mathrm{C}$

b)

1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\cos(3x)-\sin(2x)\right)\cdot dx=\left[\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{6}}=\left(\frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{3}-\left(\frac{1}{3}\sin 0+\frac{1}{2}\cos 0\right)\right)=\underline{\underline{\frac{1}{12}}}$$

2) $$\int_1^2\frac{x}{2x^2-1}\cdot dx==\left[\frac{1}{4}\ln\left|2x^2-1\right|\right]_1^2==\frac{1}{4}(\ln 7-\ln 1)=\frac{1}{4}\ln 7$$



"Algebra class will be important to you later in life because there's going to be a test six weeks from now."