Oppfriskningskurs i matematikk
Oppgaveheftet

Oppsummeringsnotater
Oppgaver med fasit
Høsten 2018

Amir Massoud Hashemi

I oppfriskningskurset skal vi prøve å gå gjennom følgende temaer:

- **Grunnleggende Algebra**
- Den reelle aksen og intervaller
- Bokstavregning og forkortningsregler
- Kvadratsetningene
- Potensregler
- Brøkregning
- Ligninger og ulikheter
- Polynomer
- Rasjonale uttrykk og polynomdivisjon

- **Funksjonsbegrepet, funksjoner og grafer**
- Hva er en funksjon?
- Hva er en entydig-funksjon?
- Inverse funksjoner

- **Eksponentregning**
- Potensregler, regler for eksponentialledd og logaritmer
- Kan jeg løse ligninger som $a^x = b$ ved hjelp av logaritmer?
- Eksponential- og logaritme ligninger
- Eksponential- og logaritme funksjoner
- Anvendelser av eksponential funksjoner

- **Trigonometri**
- Litt om Trigonometri i grader;
  Pytagoras-setningen, litt om sinus-setning, cosinus-setning og arealsetning
- Trigonometri i radianer:
  Enhetssirkelen og trigonometriske funksjoner
  Trigonometriske formler
  Grafen til trigonometriske funksjoner
- Enkle trigonometriske ligninger

Studietips

Etter at du har lest pensum og har regnet oppgaver systematisk i løpet av semesteret, kan det være nyttig å reflektere over det du faktisk har lært. Læring skjer først når du klarer å gjøre ny kunnskap til din egen.

Det er nyttig å bruke omformingsteknikker til å bearbeide og klargjøre det du har lest for deg selv. Det å snakke med medstudenter (eller tenke høyt for seg selv) og skrive egne notater gir muligheter til å klargjøre tankene dine skriftlig og å lære deg å tenke relevant om det du har lest. Den nye kunnskapen du tilegner deg må holdes opp mot det du har lært tidligere og tilpasses med det nye. Jo bedre du klarer å sette ny kunnskap i sammenheng med etablert kunnskap, desto mer klarer du å huske. Dette er både et mål og et middel i lese-og læringsprosessene.

Du kan spørre deg selv:

Har jeg lært de viktigste delene i faget og har jeg lært å anvende teorien?
Har jeg lært å bruke metodene som det er undervist i til å løse sammensatte oppgaver?
Har jeg forstått sammenhengen mellom emner i faget?

Her følger en kort oversikt som kan være et utgangspunkt for refleksjon over viktige emner, men det er ikke ment at oversikten skal dekke alle detaljene i pensum.

Oppfriskningskurs

Dag 1:
Studieteknikk og studietips
Grunnleggende algebra
Funksjonsbegrepet
Litt Eksponentialregning og logaritmer

Dag 2:
Trigonometri
Eksponentialregning

Hvis det blir tid:

Litt Grenseverdi og kontinuitet
Litt derivasjon og integrasjon

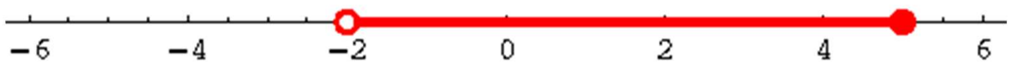
Legg merke til at fasit følger ikke med alle oppgavene i dette heftet. Jeg prøver å ta så mange som mulig på tavla.
Kommentarer tas imot med glede: ahas@hvl.no

Den reelle aksen og Intervaller

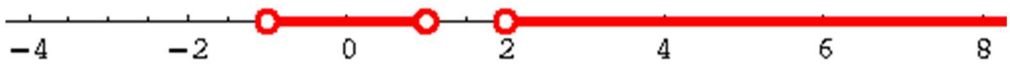
Oppgave 1

Skriv følgende intervaller

a)



b)



Oppgave 2

Skisser følgende intervaller på den reelle aksen: **a)** $[-1, 2>$ **b)** $[3, \infty>$

Bokstavregning

Parentesregler

$$a(b+c) = ab + ac \qquad (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

Kvadratsetningene

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$	(1. og 2. kvadratsetning)
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	(3. kvadratsetning)

Brøkregning og brudden brøk[1]

- $\dfrac{b+c}{a} = \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}$ Husk: $\dfrac{a}{b+c} \neq \dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{c}$
- $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a \cdot c}{b \cdot d}$ Husk: $a \cdot \dfrac{b}{c} = \dfrac{a \cdot b}{c}$
- $a : \dfrac{c}{d} = a \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{a \cdot d}{c}$ Husk: $\dfrac{a}{\frac{c}{d}} = a : \dfrac{c}{d} = a \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{a \cdot d}{c}$
- $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$ Husk: $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$

[1] En brudden brøk består av en brøk i telleren, en brøk i nevneren og en hovedbrøkstrek mellom dem.

Oppgave 3
Skriv så enkel som mulig:

a) $\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{9}{25}}$ **b)** $2\frac{1}{3}:\frac{7}{6}$ **c)** $2-\dfrac{-\frac{1}{5}+1}{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}$ **d)** $\dfrac{17}{x^2}-\dfrac{3}{2x}\cdot\dfrac{5}{x}$ **e)** $2-\dfrac{\frac{5}{2}-\frac{x+2}{2x}}{2-\frac{1}{x}}$

f) $xy^2-2xy+ay-2a$ **g)** $\dfrac{a^3b-ab^3}{a+b}$ **h)** $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ **i)** $\dfrac{a\sqrt{b}-\sqrt{ab}}{b\sqrt{a}-b}$ **j)** $\dfrac{ab^3}{a^2}:\dfrac{b^2}{a}$

k) $\dfrac{a+2b}{5b}-\dfrac{a-2b}{2a}-\dfrac{2a^2+10b^2}{10ab}$ **l)** $\dfrac{(a-b)^2}{2a}-\dfrac{a-2b}{2}$ **m)** $\dfrac{a+2b}{a-2b}-\dfrac{a-2b}{a+2b}$

Potenser med heltallige eksponenter

a^n kalles *potens* (potensledd) og er definert som: $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdots\cdot a}_{n \text{ ganger}}$

der a er grunntall og n er et naturlig tall og kalles eksponent.

Hvis $a\neq 0$, kan vi skrive $a^0=1$ og $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

Potenseregler

$a^m\cdot a^n = a^{m+n}$	$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$
$\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$
$(a^n)^m = a^{n\cdot m} = (a^m)^n$	$\sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{p}{q}}$

Husk:

$a^0=1$	$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$	$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

Kvadratrot skrives slik: $\sqrt{\ }$ og $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$. n'te rot skrives $\sqrt[n]{\ }$ og kan noteres: $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

Oppgave 4
Skriv så enkel som mulig:

a) $\dfrac{x^6\cdot x^2\cdot(x^2)^{-1}}{(x^3)^{-2}}:\dfrac{1}{(x^4)^{-3}}$ **b)** $\dfrac{(a^2b)^3\cdot(b^2a)^{-1}\cdot(a^3)^{-1}}{(a^4b^4)^{-2}}:\dfrac{(b^4)^2}{(a^3)^{-3}}$ **c)** $\dfrac{(xy^4)^{-2}\cdot\left(y^{-3}x^6\right)^{-\frac{2}{3}}}{\left(-\dfrac{x^{-2}}{y^2}\right)^3}$

Fasit: 4a) $x^{6+2-2-(-6)-12}=x^0=1$ b) $a^{6-1-3+8-9}b^{3-2+8-8}=ab$ c) $-x^{-2-4+6}y^{-8+2+6}=-x^0y^0=-1$

Ligninger

Her skal vi fokusere på førstegrads-, andregradsligninger, noen rasjonale og irrasjonale ligninger.

Førstegradsligninger

En **førstegradsligning** er en ligning der den ukjente har eksponent lik 1

.Førstegradsligning på klassisk form skrives som $ax+b=0$, og løsningen er da $x=-\frac{b}{a}$.

Oppgave 5

Løs ligningene: a) $8x+7=88-x$ b) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=11-x$ c) $1-\frac{1}{2}(3-x)+\frac{2x}{5}=4$

Fasit: 5a) $x=9$ b) $x=6$ c) $x=5$

Røtter og ligninger på formen $x^2=a$ og $x^n=a$, der $a>0$

Ligningen $x^2=a$ kan ha to reelle løsninger for positive a-verdier: $x=\pm\sqrt{a}$.

Og tilsvarende; $x^n=a$ har alltid minst én positiv løsning; $x=\sqrt[n]{a}$.

Husk: $\sqrt{a}=a^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$ (der n er et naturlig tall)

Oppgave 6

Løs ligningene: a) $x^4=625$ b) $x^3=243$ Fasit: 6a) $x=\pm 5$ b) $x^3=\sqrt[3]{3^5}=3\sqrt[3]{9}$

Andregradsligninger $ax^2+bx+c=0$

Vi har å gjøre med en andregradsligning når en ligning har en ukjent som er opphøyd i 2. Den skrives ofte på denne formen: $ax^2+bx+c=0$, der a, b og c er reelle tall og $a\neq 0$

- Løsningene til andregradsligningen: $ax^2+bx+c=0$ kan skrives som:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \begin{cases} b^2-4ac>0 & \text{2 foskjellige reelle løsninger} \\ b^2-4ac=0 & \text{dobbel løsning} \\ b^2-4ac<0 & \text{ingen reelle løsninger} \end{cases}$$

- Hvis $b=0$, kan ligningen $ax^2+c=0$ ha reelle løsninger $x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ **når** $ac<0$.
- Hvis $c=0$, kan ligningen $ax^2+bx=0$ ha løsningene $x_1=0$, $x_2=-\frac{b}{a}$
- En andregradsfunksjon $f(x)=ax^2+bx+c$ som har nullpunkt, kan faktoriseres med dens nullpunkt(er):

  $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, der x_1 og x_2 kan bestemmes ved:

  $$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Det er hovedsakelig tre tilfeller av ligningene:

		Eksempel
Ingen konstantledd $c=0$	$ax^2+bx=0$ $x\cdot(ax+b)=0$ $x=0 \;\; eller \;\; ax+b=0$ $\underline{\underline{x=0 \;\; eller \;\; x=-\frac{b}{a}}}$	$2x^2-4x=0$ $x\cdot(2x-4)=0$ $x=0 \;\; eller \;\; 2x-4=0$ $\underline{\underline{x=0 \;\; eller \;\; x=2}}$
Ingen førstegradsledd $b=0$	$ax^2+c=0$ $ax^2=-c$ $x^2=-\frac{c}{a}$, reelle løsninger hvis $ac<0$ $\underline{\underline{x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}}}$	$4x^2-9=0$ $4x^2=9$ $x^2=\frac{9}{4}$ $\underline{\underline{x=\pm\frac{3}{2}}}$
Generell	$ax^2+bx+c=0$ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $b^2-4ac>0$: 2 reelle løsninger $b^2-4ac=0$: en dobbel løsning	$x^2+x-6=0$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-6)}}{2\cdot1}$ $x=\frac{-1\pm5}{2}$ $\underline{\underline{x=2 \quad eller \quad x=-3}}$ $x^2+4x+4=0$ $x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1}$ $x=\frac{-4\pm0}{2}$ dermed $\underline{\underline{x=-2}}$

Oppgave 7
Løs ligningene:

a) $x^2+4x=5$ b) $x^2=3x$ c) $x^2-5=0$ d) $x^6-3x^3+2=0$
e) $x-3\sqrt{x}+2=0$

Oppgave 8
Skriv så enkel som mulig:

a) $\frac{5x^6-5}{x^3+1}$ b) $\frac{x^3-5x^2+4x}{x^5-16x^3}=$ c) $\frac{x^{10}-3x^5+2}{(x^5-2)}$

Fasit:

7a) $\{1\,,-5\}$ b) $\{0\,,3\}$ c) $\{\pm\sqrt{5}\}$ d) $\{1\,,\sqrt[3]{2}\}$ e) $\{1\,,4\}$

8a) $\frac{5(x^3-1)(x^3+1)}{x^3+1}=\underline{\underline{5(x^3-1)}}$ **b)** $\frac{x(x-1)(x-4)}{x^3(x-4)(x+4)}=\underline{\underline{\frac{x-1}{x^2(x+4)}}}$ **c)** $\frac{(x^5-1)(x^5-2)}{(x^5-2)}=\underline{\underline{x^5-1}}$

Rasjonale ligninger

Oppgave 9 Løs ligningene: a) $\dfrac{x+3}{x(x+1)} = 2$ b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x-1} = 2$

Irrasjonale ligninger

Vi skal studere noen enkle irrasjonale ligninger på formen: $\sqrt{ax+b} = cx+d$ og $\sqrt{f(x)} + g(x) = 0$ som kan forenkles til en første- eller andregradsligning. Man må alltid sette løsningene på prøve for å sjekke om det har kommet inn uønskede løsninger ved kvadrering.

Oppgave 10

Løs ligningene: a) $\sqrt{2x+3} = x$ b) $5 + \sqrt{x-3} = x$ c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-8}} - \sqrt{x^2-8} = 8$

Løsn.

a) $\sqrt{2x+3} = x$

$2x+3 = x^2$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-3)}}{2} = \begin{cases} -1 & \sqrt{2\cdot(-1)+3} = 1 \neq -1 \\ 3 & \sqrt{2\cdot 3+3} = 3 = 3 \quad OK! \end{cases}$$

b) $\sqrt{x-3} = x-5$

$x - 3 = (x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

$x^2 - 11x + 28 = 0$

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4(28)}}{2} = \frac{11 \pm 3}{2} = \begin{cases} \underline{\underline{7}} & \sqrt{7-3} = 7-5 \quad OK! \\ 4 & \sqrt{4-3} = 4-5 \quad NEI! \end{cases}$$

c) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-8}} - \sqrt{x^2-8} = 8$

$\dfrac{x^2 - (x^2-8)}{\sqrt{x^2-8}} = 8$ og dermed $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-8}} = 1$, $\sqrt{x^2-8} = 1$, $x^2 = 9$ og $\underline{\underline{x = \pm 3}}$

Def.

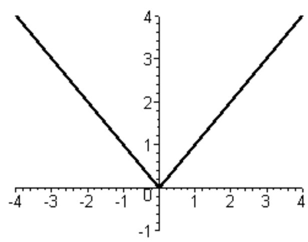
Absoluttverdi

Absoluttverdien eller tallverdien til et reelt tall er den numeriske verdien til tallet uten hensyn til fortegnet. Den geometriske tolkningen av absoluttverdi kan være avstand på tallinjen.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Husk: $\sqrt{x^2} = |x|$

Grafen til $y = |x|$:



Oppgave 11 Løs ligningene: a) $|x| = 5$ b) $|x-1| = 3$ Fasit: a) $\{\pm 5\}$ b) $\{-2, 4\}$

Ulikheter

Ulikheter er et matematisk oppsett med opplysninger om hva som er større, mindre, større og lik, eller mindre og lik noe annet. Minst ett av leddene består av en eller flere ukjente.

<u>Hva er de viktigste reglene ved løsing av en ulikhet?</u>
Reglene når du regner med ulikheter er nesten de samme som når du regner med ligninger. Det kan adderes og subtraheres med samme tall på begge sider. Det kan også multipliseres og divideres med et positivt tall på begge sider. Men hvis det skal multipliseres eller divideres med et negativt tall, må ulikhetstegnet snus for at ulikheten skal stemme.

Å løse en ulikhet er å finne de verdier av x som gjør ulikheten sann.

<u>Hva må man passe på når man løser ulikheter?</u>
Når man løser ulikheter må man passe på å snu ulikhetstegnet når man multipliserer eller dividerer med negative tall.
Regel 1: Legge til / trekke fra det samme tallet på begge sider.

Eksempel: ulikhet $x-2>6$ har samme løsninger som ulikheten $x>8$ (Den andre ulikheten ble hentet fra den første ved å legge 2 på begge sider.)

Regel 2: Hvis vi bytter sidene i ulikhetene, endrer vi retningen på ulikhetstegnet.

Eksempel: ulikhet $3-x>1$ har samme løsninger som ulikheten $1<3-x$. (Vi har byttet side og vendte ``$>$'' til en ``$<$'').

Sist, men ikke minst, den operasjonen som er kilden til alle problemer med ulikheter:

Regel 3a: Multiplisere / dividere med samme positive tall på begge sider.
Regel 3b: Multiplisere / dividere med samme negative tall på begge sider og endre retningen på ulikhetstegnet.
Betrakt ulikhetene med a, b, og c der $c<0$ (c er negativ):

$$a<b \Rightarrow \; ac>bc$$
$$a \geq b \Rightarrow \; ac \leq bc$$

Her skal vi se på noen eksempler med

Enkle ulikheter:	$p(x)\ \leq\ ,\ <\ ,\ \geq\ ,\ >\ 0$
Doble ulikheter:	$m(x) \leq p(x) \leq n(x)$
Rasjonale ulikheter	$\dfrac{p(x)}{q(x)}\ \leq\ ,\ <\ ,\ \geq\ ,\ >\ 0$

Oppgave 12
Løs ulikhetene:

a) $2(x-1)-3(1-x)<x+3$ b) $\dfrac{x+4}{3} \geq \dfrac{2x+1}{3}+1$

c) $x^2-4>3x$ d) $\dfrac{2}{x-1}-1<\dfrac{2}{x}$

Fasit - 12)

a) $2(x-1)-3(1-x)<x+3 \Leftrightarrow 2x-2-3+3x<x+3 \Leftrightarrow 4x<8 \Leftrightarrow \underline{\underline{x<2}}$

b) $\frac{x+4}{3} \geq \frac{2x+1}{3}+1 \Leftrightarrow x+4 \geq 2x+1+3 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x \leq 0}}$

c)

$x^2-4>3x$

$x^2-3x-4>0$

$(x+1)(x-4)>0$

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
$x+1$		$----$	0	$++++$	0	$++++$	
$x-4$		$----$	0	$----$	0	$++++$	
$(x+1)(x-4)>0$		$++++$ Løsning	0	$----$	0	$++++$ Løsning	

Løsning:

$\{x \mid x<-1 \vee x>4\}$ eller $<-\infty,-1> \vee <4,\infty>$

d)

$$\frac{2\cdot x-1\cdot x(x-1)-2\cdot(x-1)}{(x-1)x}<0 \Rightarrow \frac{2x-x^2+x-2x+2}{(x-1)x}<0$$

$$\frac{-x^2+x+2}{(x-1)x}<0 \Rightarrow \frac{-(x-2)(x+1)}{(x-1)x}<0 \Rightarrow \text{ eller } \frac{(x-2)(x+1)}{(x-1)x}>0$$

Tallinjediagram:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x-2$		$---$	0	$----$	0	$----$	0	$---$	0	$+++$	
$x+1$		$---$	0	$+++$	0	$++++$	0	$+++$	0	$+++$	
x		$---$	0	$----$	0	$++++$	0	$+++$	0	$+++$	
$x-1$		$---$	0	$----$	0	$----$	0	$+++$	0	$+++$	
$\frac{(x-2)(x+1)}{x}$		$+++$	0	$---$	$\times$[2]	$+++$	0	$----$	0	$+++$	

Løsning: $\underline{\underline{x<-1}}$ eller $\underline{\underline{0<x<1}}$ eller $\underline{\underline{x>2}}$

Doble ulikheter

Doble ulikheter løses som enkle ulikheter. Man ser på de to ensidige ulikhetene hver for seg, og ser hvilke x-verdier som tilfredsstiller begge ulikhentene.

$-2<x^2+3x\leq 4$

Behandler først venstre ulikhet:

$-2<x^2+3x$

$0<x^2+3x+2$

$0<(x+2)(x+1)$

Ved å bruke fortegnslinje får vi løsningsmengden $(-\infty,-2)\cup(-1,\infty)$.

For den høyre ulikheten får vi:

$x^2+3x\leq 4$

$x^2+3x-4\leq 0$

$(x-1)(x+4)\leq 0$

[2] $\times$ betegner bruddpunkt.

Setter opp fortegnslinje, og får vi da løsningsmengden $[-4, 1]$.
Sett opp den reelle aksen og marker alle tre intervaller, og ser da snittmengden, der begge ulikheter tilfredsstilt, er da: $[-4, -2) \cup (-1, 1]$

Oppgave 13
Løs ulikheten:

$$-5 < x^2 - 6 \le x \ .$$

Fasit: $\{(-\infty, -1) \cup (1, \infty)\} \cap \{[-2, 3]\} = \underline{\underline{[-2, -1) \cup (1, 3]}}$

Polynom divisjon

Det å dele polynomer er som å dele tall. Når vi deler 45 med 6, er kvotienten 7 og resten er tre. Dette kan skrives på to måter:

$$\frac{45}{7} = 6 + \frac{3}{7} \qquad \text{or} \qquad 45 = 6 \cdot 7 + 3$$

Dersom $P(x)$ og $D(x)$ er to polynomer, der $P(x)$ har høyere grad enn $D(x)$, kan man skrive:

$$\frac{P(x)}{D(x)} = K(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

eller

$$P(x) = D(x) \cdot K(x) + R(x)$$

Dividende **divisor** **Kvotient** **restleddet**

Dersom $P(x) = 0$ for $x = a$; det vil si $P(a) = 0$, er da $P(x)$ er delelig med $(x - a)$

Eksempel

Eks.

Gitt $P(x) = 4x^3 - 3x^2 + x - 12$.

i) Bestem restleddet for polynom divisjonen $P(x) \div (x-2)$.

ii) Gjennomfør polynom divisjonen $4x^3 - 3x^2 + x - 12 \div x - 2$.

Løsn.

i) $P(2) = 10$

ii) Neste side

$$4x^3 - 3x^2 + x - 12 : \quad x - 2 = 4x^2 + 5x + 11$$
$$\underline{-(4x^3 - 8x^2)}$$
$$\underline{5x^2 + x + 9}$$
$$\underline{-(5x^2 - 10x)}$$
$$11x-12$$
$$\underline{-(11x - 22)}$$
$$10$$

Eller $\dfrac{4x^3 - 3x^2 + x - 12}{x-2} = 4x^2 + 5x + 11 + \dfrac{10}{x-2}$

Oppgave 14

a) Regn ut lestleddet til polynom divisjonen $7x^3 + 20x^2 - x + 5 : x + 3$ uten å dividere.
b) Gjennomfør polynom divisjonen $7x^3 + 20x^2 - x + 5 : x + 3$

Oppgave 15

Bestem b **slik at** $x^3 + bx + 2$ er delelig med $x+1$.

Oppgave 16

Faktorier $x^3 - 7x + 6$

Fasit:

14 a) $P(-3) = -1$ og b) $\dfrac{7x^3 + 20x^2 - x + 5}{x+3} = 7x^2 - x + 2 + \dfrac{-1}{x+3}$

15) $b = 1$

16) $(x-1)(x-2)(x+3)$

Hva er en funksjon?

Def.

En funksjon *f* er en regel som tilordner ethvert element, x, fra en mengde kalt *definisjonsmengde*, til et entydig bestemt element, y, i en mengde kalt *verdimengde*:

$$y = f(x) \text{ der } x \in D_f \quad \text{og} \quad y \in V_f$$

x og *y* kalles henholdsvis *uavhengig* variabel og *avhengig* variabel.
Definisjonsmengden består av de verdiene som variabelen x kan ta. For å bestemme definisjonsmengden skal vi finne de x-verdiene som funksjonen kan akseptere.

Kravet for at en relasjon $y = f(x)$ er en funksjon er:
For enhver *x* i definisjonsmengden finnes *én og bare én y* i verdimengden:

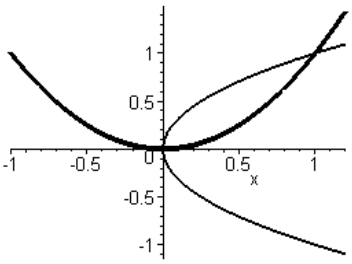
$$x_1 = x_2 \Rightarrow y_1 = y_2$$

Vertikallinjetesten: En linje parallell med y-aksen skjærer funksjonskurven høyst i ett punkt.

Eks.

Eksempel

$y = x^2$ er en funksjon, mens $y^2 = x$ ikke tilfredsstiller definisjonen til en funksjon (grafen til $y = x^2$ som er vist litt tykkere har bare et skjæringspunkt med en vertikal linje, mens $y^2 = x$ har to).



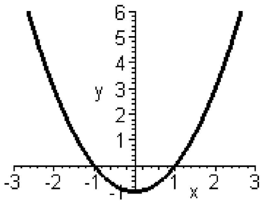
Grafen til en funksjon

La f være en funksjon. Mengden av alle tallpar $(x, f(x))$ som vi får ved å la x gjennomløpe definisjonsmengden til f, kalles grafen til funksjonen $y = f(x)$.

Eks.

Eksempel

Grafen til $y = f(x) = x^2 - 1$ er vist her:
Som vi ser, er denne relasjonen en funksjon.



Noen viktige begrep

- **Monotoni**

(i) En funksjon *f* er *voksende* dersom: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$

(ii) En funksjon *f* er *strengt voksende* dersom: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$

(iii) En funksjon *f* er *avtagende* dersom: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$

(iv) En funksjon *f* er *strengt avtagende* dersom: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

- **Kontinuitet**

En funksjon $y = f(x)$ er kontinuerlig dersom grafen er sammenhengende. Begrepet kan utdypes bedre når man har lært grenseverdi begrepet.

- **En entydig funksjon**

For enhver *y* i verdimengden finnes *én og bare én x* i definisjonsmengden. Vi kan bruke den såkalte horisontallinjetesten til å studere entydighet.

- **Horisontallinjetesten**

En linje parallell med *x*-aksen skjærer funksjonskurven *høyst* i ett punkt.

- **Sammensatte funksjoner**

For eksempel: $y = \sqrt{x^2 + 1}$ kan anses som $y = \sqrt{g(x)}$ der $g(x) = x^2 + 1$.

- **Oppdelte funksjoner**

En funksjon som er uttrykt ved hjelp av flere funksjonsuttrykk i forskjellige intervaller.

For eksempel: $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$

- **Odde og jamne funksjoner, og symmetriegenskaper** (er foreløpig ikke pensum)

Noen funksjoner

Polynomfunksjoner: $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ (polynom av n'te grad)
(for eksempel førstegrads- og andregradsfunksjoner)

Rasjonale funksjoner: $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($g(x) \neq 0$), der *f* og *g* er polynomfunksjoner

Eksponentialfunksjoner: $y = a^x$, $a > 0$

Logaritmefunksjoner: $y = \log_a x$, der $x > 0$, $a > 0$.
(for eksempel briggske logaritmer, $y = \log x$ og naturlige logaritmer, $y = \ln x$)

Trigonometriske funksjoner: $y = \sin x$, , $y = \cos x$, $y = \tan x$, $y = c + a\sin(\omega x - \varphi)$, ...

Førstegradsfunksjoner $f(x) = ax + b$

En førstegradsfunksjon er en funksjon der funksjonsuttrykket er av første grad og kan skrives på formen: $y = ax + b$, der *a* kalles stigningstall og *b* er konstantleddet.

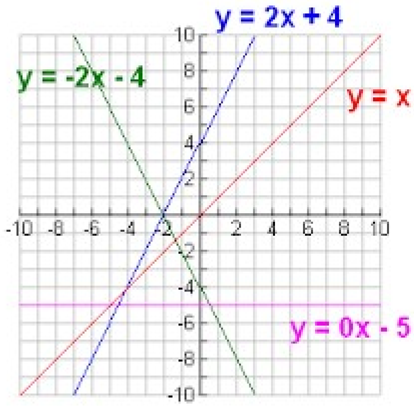
- Ettpunktsformelen: $y - y_0 = a(x - x_0)$

(en rett linje med stigningstall *a* som går gjennom punktet $(x_0\ ,\ y_0)$)

- Topunktsformelen: $\dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

(en rett linje gjennom punktene $(x_0\ ,\ y_0)$ og $(x_1\ ,\ y_1)$

der stigningstallet da blir $a = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$)



Grafen til $y = ax + b$, der *a* kalles *stigningstall* og *b* konstant ledd, er en rett linje.

$a > 0 \Rightarrow$ funksjonen er strengt voksende.

$a < 0 \Rightarrow$ funksjonen er strengt avtagende.

$a = 0 \Rightarrow$ funksjonen er konstant: $y = b$.

Andregradsfunksjoner $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Dersom $a > 0$, smiler grafen, mens grafen er sur når $a < 0$.
- Skjæringspunkt med y-aksen er ($x = 0$, $y = c$).
- Nullpunktene til grafen (skjæringspunkt med *x*-aksen) er $(x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ ,\ y = 0)$.
- Husk at andregradsfunksjonen kan faktoriseres hvis den har løsning(er):
  $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Grafen er symmetrisk om linjen: $x = \dfrac{-b}{2a}$.

For å tegne grafen til en andregradsfunksjon kan vi tenke slik:

1) Er grafen sur eller smiler den?

2) Bestem symmetrilinjen: $x = \dfrac{-b}{2a}$ og $f(\dfrac{-b}{2a})$.

   Faktisk er punktet: ($x = \dfrac{-b}{2a}, y = f(\dfrac{-b}{2a})$) koordinatene til maksimumspunktet ($a < 0$) eller minimumspunktet ($a > 0$).

3) Bestem eventuelle nullpunkt.

4) Bestem skjæringspunktet med *y*-aksen $(0\ ,\ c)$.

Eksempel

Tegn grafen til $y = x^2 - 4x + 3$

1) Nullpunktene :

$x^2 - 4x + 3 = 0$ og dermed er $x = 1 \vee x = 3$

2) Symmetrilinjen: $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$.

3) $a = 1 > 0$ grafen smiler og dermed er

$(2, f(2)) = (2, 2^2 - 4(2) + 3 = -1)$ lokalt minimum.

Inverse funksjoner

En invers funksjon til en funksjon $y = f(x)$ der $x \in D_f$ og $y \in V_f$ er en relasjon som tilordner *y*-verdien tilbake til *x*-verdien.

$$x \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} y$$

Dermed er: $y = f^{-1}(x)$ der $D_{f^{-1}} = V_f$ og $V_{f^{-1}} = D_f$

Kravet for at en funksjon har en invers funksjon er at funksjonen er entydig (monoton).

Husk: $f^{-1}(f(x)) = x$ og $f(f^{-1}(x)) = x$

- Hvordan kan vi bestemme den inverse funksjonen til $y = f(x)$?

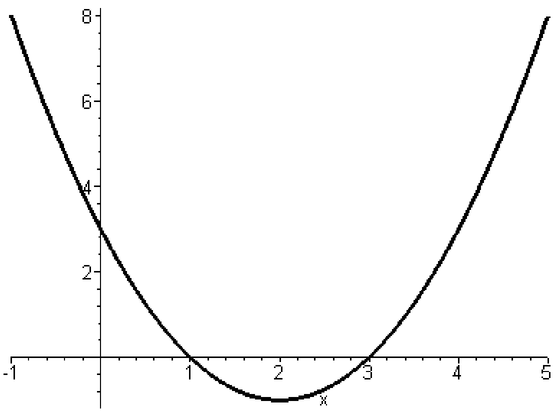
1) Bestem *x* med hensyn til *y*.

2) Bytt om *x* og *y*.

Eksempel

Bestem den inverse funksjonen til $y = f(x) = x^2 + 1$ gitt $x > 0$

1) Finner *x* uttrykt ved *y*:



$x^2 = y - 1$ og siden $x > 0$, får vi: $x = \sqrt{y-1}$

2) Bytter om *x* og *y*:

$y = \sqrt{x-1}$ dermed er: $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

Bemerk: $D_{f^{-1}} = V_f = [1, \infty >$ og

$V_{f^{-1}} = D_f = [0, \infty >$

Oppgave 1
Bestem definisjonsmengden og verdimengden til følgende funksjoner.

a) $y = \sqrt{2-x}$

b) $y = \dfrac{1}{x^2 - 9}$

c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{x}}}$

d) $y = \ln(x-5)$

Oppgave 2
Bestem den rette linjen som går gjennom punktet $(-1,\ 2)$ og

i) Er parallell med linjen $y = 3x - 1$.

ii) Er loddrett på linjen $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$.

Hint ii): Stigningstallene til to loddrette linjer tilfredsstiller $a_1 \cdot a_2 = -1$

Oppgave 3
Tegn grafen til

a) $y = x^2 - 2x$ b) $y = -x^2 + 2x + 3$

Oppgave 4
Kan følgende funksjoner ha inversfunksjon?

a) $y = x^4$ b) $y = \ln x$ c) $y = x^2$ d) $y = x^2;\ x > 0$

Oppgave 5
Bestem inversfunksjonen til følgende funksjoner:

a) $y = \sqrt{x-3}$ b) $y = \ln(x-2)$ c) $y = e^{5x}$

Oppgave 6 - Tekstoppgaver

a) En sirkel har arealet A. Sett opp et uttrykk om omkretsen uttrykt ved A.
b) Avstanden fra et punkt på grafen til $y = \sqrt{x-1}$ til origo er *d*.
Sett opp et uttrykk for d uttrykt ved *x*.
c) En sylindrisk tett boks skal lages av en plate med areal A. Sett opp en funksjonsuttrykk for volumet til sylinderen uttrykt ved A og radien *r*.

Oppgave 7 – Å bestemme en variabel fra en formel eller et uttrykk

a) Bestem r fra utrykket: $F = k\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$.

b) Bestem r fra uttrykket: $V = \dfrac{4\pi}{3}r^3$.

c) Bestem x fra uttrykket: $y = \sqrt{1-\sqrt{x}}$

d) Gitt $V = \dfrac{4\pi}{3}r^3$ og $S = 4\pi r^2$. Bestem S uttrykt ved V

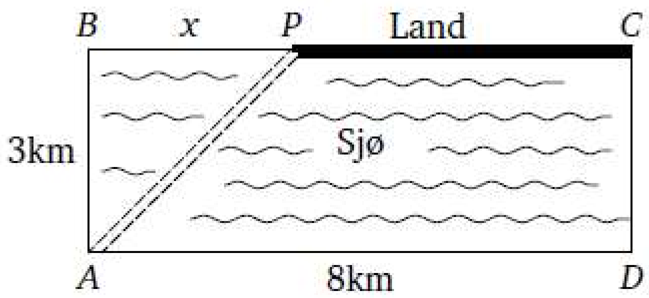
Oppgave 8

Volumet til en kule med radien r er gitt ved. $V = \dfrac{4\pi}{3}r^3$.

Hvis radien er fordoblet. Hvor mange prosent har volumet steget?

Oppgave 9

a) Bestem lengden AC uttrykket ved x.



På figuren: AB = 3km, AD= 8km og BP = x.

b) Det skal legges gassrør fra stasjon A til stasjon C. Det koster dobbelt så mye å legge rør langs sjøen som på land. Kostanden er avhengig av valget avstanden x vist her her:

(Første delen av røret(AP) ligger i vannet og den andre delen av røret(PC) ligger på land)

Kostanden pr. lengde enhet på land er k. Sett opp kostnadsfunksjonen uttrykt ved x.

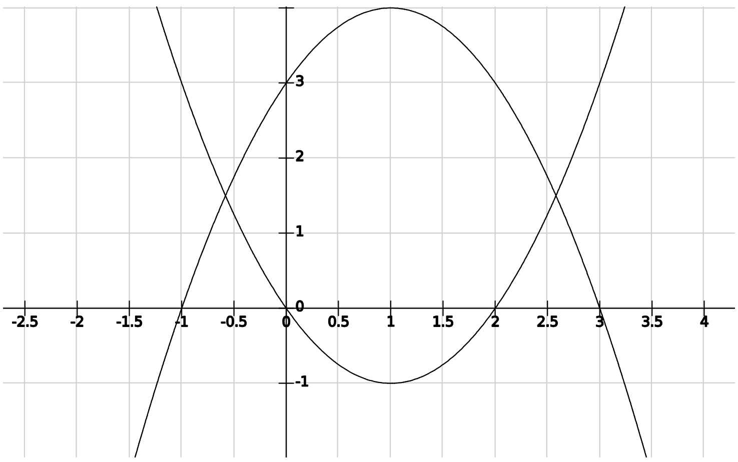
Fasit:

1a) $D_f = \langle -\infty, 2]$ og $V_f = [0.\infty \rangle$	b) $D_f = \mathbf{R} \setminus \{-3,3\}$ $V_f = \langle -\infty, -\frac{1}{9} \rangle \cup \langle 0, \infty \rangle$
c) $D_f = [0,4\rangle$ og $V_f = [\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty \rangle$	d) $D_f = \langle 5, \infty \rangle$ og $V_f = \mathbf{R}$

2)

i) $y - 2 = 3(x+1)$ og dermed: $y = 3x + 5$

ii) $y - 2 = 2(x+1)$ og dermed: $y = 2x + 4$

3) 

4) Ikke a og c) (ikke en entydig)

5) a) $y = x^2 + 3$ b) $y = e^x + 2$ c) $y = \frac{1}{5}\ln x$ 6) a) $d = \sqrt{x^2 + x - 1}$ b) $d = \pi r^2 \dfrac{A}{2\pi r} = \dfrac{Ar}{2}$

7) a) $r = \sqrt{k\dfrac{m_1 m_2}{F}}$ b) $r = \sqrt[3]{\dfrac{3V}{4\pi}}$ c) $x = (1 - y^2)^2$ d) $S = 4\pi \cdot \sqrt[3]{\left(\dfrac{3V}{4\pi}\right)^2} = \sqrt[3]{36\pi V^2}$

8) Fasit: $= \dfrac{4\pi/3\left((2r)^3 - r^3\right)}{4\pi/3\, r^3} = 7$ det vil si volumet er 7 doblet eller har økt med 600 prosent.

9) $AC = \sqrt{x^2 + 9} + 8 - x$ og kostnad $K(x) = k(2\sqrt{x^2+9} + 8 - x)$

Eksponential- og logaritmeregning

$$\overset{\substack{\text{Eksponent}\\ \uparrow}}{\underset{\substack{\downarrow\\ \text{Grunntall}}}{a^n}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot\cdots\cdot a}_{n \text{ ganger}}$$

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{eller} \quad 2^3 = 8$$

Potensledd er en variabel grunntall(positiv) opphøyd en konstant; x^n.
For eksempel
Eksponentialledd er et positivt konstant(grunntall) opphøyd en eksponent der eksponenten kan variere, for eksempel i formelen for å beregne kapittel n år $K(n) = K_0 \cdot (1 + \frac{p}{100})^n$.

Potenser med heltallige eksponenter

a^n kalles *potens* (potensledd) og er definert som: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots \cdot a}_{n \text{ ganger}}$

der *a* er grunntall og *n* er et naturlig tall og kalles eksponent.
Hvis $a \neq 0$, kan vi skrive $a^0 = 1$ og $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Regneregler

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m} = \left(a^m\right)^n \qquad \sqrt[q]{a^p} = a^{\frac{p}{q}}$$

Husk:

$$a^0 = 1 \qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Kvadratrot skrives slik: $\sqrt{\ }$ og $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

Eksempel

Skriv så enkel som mulig: **a)** $\dfrac{4^{-x} \cdot 2^{2x} \cdot 8^x \cdot 2^{-x}}{4^x}$ **b)** $\dfrac{3^{2x} \cdot 6^x \cdot 9^{-x} \cdot 2^x}{4^x \cdot (\sqrt{3})^{2x}}$

a) $\dfrac{4^{-x} \cdot 2^{2x} \cdot 8^x \cdot 2^{-x}}{4^x} = 2^{-2x+2x+3x-x-2x} = 2^0 = 1$ **b)** $\dfrac{3^{2x} \cdot 6^x \cdot 9^{-x} \cdot 2^x}{4^x \cdot (\sqrt{3})^{2x}} = 3^{2x+x-2x-x} \cdot 2^{x+x-2x} = 3^0 2^0 = 1$

Praktisk eksempel

En verdi øker med 40% pr. år. Hvor mye har verdien steget i løpet av 3 år.
Verdien har blitt $(1{,}40) \cdot (1{,}40) \cdot (1{,}40) = 1{,}40^3 = 2{,}744$ og da verdien har steget :
$2{,}744 - 1 = 1{,}744$, da har verdien steget med 174,4% i løpet av 3 år.

Relativ økning og vekstfaktor

Relativ endring:

$$\text{Den relative endringen} = \frac{\text{Den absolutte endringen}}{\text{Startverdien}}$$

Den relative endringen kalles også den prosentvise endringen.
Den absolutte endringen kalles også tilveksten.

Anta at en størrelse øker fra verdien x_0 til x_1.

Den absolutte endringen (tilveksten) er da $x_1 - x_0$ og den relative endringen er $(x_1 - x_0)/x_0$.

Vekstfaktor kan defineres som x_1/x_0.

Eks.

Eksempel 1.78

Prisen på en radio ble satt ned fra 500 kr til 350 kr.
Bestem den absolutte prisendringen og den relative prisendringen.

Løsn.

Den absolutte prisendringen: $350 - 500 = -150$
Den relative prisendringen: $-150/500 = -0,3$ eller -30 %.
Det vil si at prisen er satt ned med 30 % og at vekstfaktor er 350/500 = 0,7 =70 %.

Vekstfaktor for prosentvis vekst

- Når en størrelse øker med p %, er vekstfaktoren: $1 + \frac{p}{100}$
- Når en størrelse synker med p %, er vekstfaktoren: $1 - \frac{p}{100}$

Eks.

Eksempel 1.9

Når lys går gjennom glass, blir lysintensiteten svakere desto tykkere glasset er.
Erfaring viser at lysintensiteten minker med 60 % per cm i glasset.

a) Hva er vekstfaktoren for lysintensiteten i dette eksemplet?

b) Sett opp en formel for lysintensiteten når lyset har trengt seg frem x cm i glasset [$I(x)$].

c) Hvor mange prosent er lysintensiteten redusert når lyset har trengt seg frem 3 cm i glasset?

Løsn.

a) 0,4 **b)** $I(x) = 100 \cdot (0,4)^x$ **c)** $100 - I(3) = 100 - 100 \cdot (0,4)^3 = 93,6\%$

Eks.

Eksempel 1.10

a) Anta en kule vokser uten å forandre form.
Dersom radien øker med 12,5%, bestem hvor mange prosent øker volumet.
Regn ut også den relative endringen til volumet.
b) Volumet til en kule er 5 doblet. Hvor mange prosent har endret radien?
Hint: $V(r)=\frac{4}{3}\pi r^3$

Løsn.

a) $$\frac{V(1{,}125r)-V(r)}{V(r)}=\frac{\frac{4}{3}\pi(1{,}125r)^3-\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi r^3}=1{,}125^3-1\approx 42{,}4\%$$

b) $$\frac{r_1-r_0}{r_0}\cdot 100=\left(\sqrt[3]{5}-1\right)\cdot 100\approx 71\%\ .$$

Regneregler for potensledd:

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	$(a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n$
$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$
$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}=\left(a^m\right)^n$	$\sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{p}{q}}$

Eks.

Eksempel

Det kan vises at:
En eksponentialfunksjon har samme vekstfaktor over alle intervaller av samme lengde.
Vis dette når eksponentialfunksjonen er gitt ved: $f(x)=c\cdot a^x$

Løsn.

Intervallengden for intervallet $I=[x_0,x_1]$ er $L=x_1-x_0$.

Dermed blir vekstfaktor: $\frac{f(x_1)}{f(x_0)}=\frac{c\cdot a^{x_1}}{c\cdot a^{x_0}}=a^{x_1-x_0}=a^L$

Ligningen $x^r=b$ **når** $x>0,\ b>0$ og $r\neq 0$

Dersom $x>0,\ b>0$ og $r\neq 0$ gjelder ekvivalensen: $x^r=b\Leftrightarrow x=(b)^{\frac{1}{r}}$

Eks.

Eksempel

Løs ligningen: $x^3 = 5$

Løsn.

$x^3 = 5 \Rightarrow \left(x^3\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \sqrt[3]{5}$

Kommentar

1) $x^{\frac{m}{n}} = b \Leftrightarrow x = b^{\frac{n}{m}}$ 2) $x \cdot a^{\frac{m}{n}} = b \Leftrightarrow x = b \cdot a^{-\frac{m}{n}}$

Oppgave 1

Regn ut: a) $\dfrac{3^3 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-4}}{2^{-1} \cdot 3^{-2}}$ b) $\dfrac{(ba)^3}{(a^0 b)^4} \cdot \dfrac{(ab)^2}{a^5 \sqrt{b}}$ c) $\left(3 \cdot 10^3\right)^2$

Oppgave 2

Regn ut: a) $\dfrac{3^3 \cdot 2^{-2} \cdot 3^{-4}}{2^{-1} \cdot 3^{-2}}$ b) $\dfrac{4^0 \cdot 2^3 \cdot 4^{-1}}{4^{-2} \cdot 2^4}$

Oppgave 3

Regn ut og skriv svarene enklest mulig.

a) $(2x)^2 \cdot (3x)^{-3}$ b) $\left(xy^2\right)^3 \cdot (xy)^{-2}$ c) $\dfrac{\left(3y^2\right)^2}{(6y)^3}$ d) $\left(2 \cdot 3^2\right)^{-2} \cdot \left(2^{-2} \cdot 3^3\right)^2$

Oppgave4

Regn ut.

a) $2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$ b) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3}$ c) $\dfrac{5^{\frac{1}{2}} \cdot \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{2}{3}}}$ d) $\dfrac{2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{4}}}{\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{-5}}$

Fasit:

1) a) 1 b) c) $9 \cdot 10^6$

2) a) $\dfrac{3}{2}$ b) 2

3) a) $\dfrac{4}{27x}$ b) xy^4 c) $\dfrac{y}{24}$ d) $\dfrac{9}{64}$

4) a) $2^{\left(\frac{4}{3}\right)}$ b) 3 c) 1 d) $\sqrt{2}$

$f(x) = c \cdot a^x$	Eksponentiell vekst når	$a > 1$	For eksempel $y = 5 \cdot 2^x$
$a > 0$, $c > 0$	Eksponentiell reduksjon når	$0 < a < 1$	For eksempel $y = 7 \cdot (\frac{1}{2})^x$

Eks.

Eksempel

Ved 1. januar 1980 var jordens befolkning 4,1 milliarder. Vi regner med at folketallet vokser med ca. 2 % pr. år. Sett opp en funksjon som beskriver folketallet t år etter året 1980.

Løsn.

Modellering ved hjelp av eksponentialfunksjonen: $f(t)=c\cdot a^t$.

Vi ønsker å bestemme c og a.

Vi kan betrakte året 1980 som $t=0$ og dermed er $f(0)=4{,}1 \Rightarrow f(0)=c\cdot a^0=c=4{,}1$

Vekstfaktoren er $a=1+0{,}02=1{,}02$ og funksjonen blir:

$f(t)=4{,}1\cdot(1{,}02)^t$ (milliarder)

som bestemmer folketallet t år etter året 1980.

For eksempel vil folketallet ved 31.12.1990 være lik: $f(11)=4{,}1\cdot(1{,}02)^{11}$

Hvis man vet funksjonsverdien ved $t=0$, kan man bestemme c.
Og ved hjelp av et annet krav kan man bestemme a.

$f(t)=f(0)\cdot a^t$ eller $y(t)=y(0)\cdot a^t$; $y(0)$ noteres ofte som y_0

$\log 10=1$, $\log 1=0$, $\ln e=1$, $\ln 1=0$

Bemerk at $x=0$ er vertikal asymptote for $f(x)=\log x$ ($\lim\limits_{x\to 0^+}\log x\to -\infty$) (se ekstra materiale)

Regneregler for logaritmer

$\log(A\cdot B)=\log A+\log B$	$\log\frac{A}{B}=\log A-\log B$	$\log A^n=n\cdot\log A$

Eks.

Eksempel (tas på tavla)

Skriv så enkel som mulig:

a) $\log 100$ b) $\log 1000$ c) $\log 0{,}001$ d) $\log\sqrt{10}$ e) $\log\frac{7}{100}$

Generelt gjelder det:

$$\log_a(AB)=\log_a(A)+\log_a(B),\quad A>0,\quad B>0$$
$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right)=\log_a(A)-\log_a(B),\quad A>0,\quad B>0$$
$$\log_a(A^n)=n\log_a(A),\quad A>0$$

Eksempel: $\log_2 32=5$, fordi 2 opphøyd i 5 er 32.

Bevis: Disse reglene oppstår ved å bruke på $a^{\log_a(A)}=A$ og $a^{\log_a(B)}=B$.

1) $a^{\log_a(AB)}=uv=a^{\log_a(A)}a^{\log_a(B)}=a^{\log_a(A)+\log_a(B)}$

$$\log_a(AB)=\log_a(A)+\log_a(B)$$

2)

$$a^{\log_a\left(\frac{A}{B}\right)} = \frac{A}{B} = \frac{a^{\log_a(A)}}{a^{\log_a(B)}} = a^{\log_a(A)-\log_a(B)}$$

$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a(A) - \log_a(B)$$

$$a^{\log_a\left(\frac{A}{B}\right)} = \frac{A}{B} = \frac{a^{\log_a(A)}}{a^{\log_a(B)}} = a^{\log_a(A)-\log_a(B)}$$

$$\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a(A) - \log_a(B)$$

3) $a^{\log_a\left(A^n\right)} = A^n = \left(a^{\log_a(A)}\right)^n = a^{n\log_a(A)}$

$$\log_a\left(A^n\right) = n\log_a(A)$$

Disse reglene gjelder uansett grunntall (men husk at grunntallet skal være positivt).

$$\log_3\left(81\cdot\sqrt[5]{3}\right) = \log_3\left(3^4\cdot 3^{\frac{1}{5}}\right) = \log_3\left(3^{4+\frac{1}{5}}\right) = \log_3\left(3^{\frac{21}{5}}\right) = \frac{21}{5}\log_3(3) = \underline{\underline{\frac{21}{5} = 4\frac{1}{5} = 4,2}}$$

eller

$$\log_3\left(81\cdot\sqrt[5]{3}\right) = \log_3\left(3^4\right) + \log_3\left(\sqrt[5]{3}\right) == 4\log_3(3) + \frac{1}{5}\log_3(3) = 4 + \frac{1}{5} = \underline{\underline{\frac{21}{5} == 4\frac{1}{5} = 4,2}}$$

Oppgave 5

Regn ut uttrykket eller bestem den ukjente variabelen:

$\log_2(8)$	$\log_{\frac{1}{3}}(t) = -1$	$\ln(1)$
$\log_9(9)$	$\log_x(81) = 2$	$\ln(x) = 2$
$\log_5\sqrt[3]{5}$	$\log_b(7) = 1$	$e^{x\ln 2} = 2$
$\log_{10}(0,00001)$	$\log_x(49) = 2$	$e^{3\ln x} = 8$
$\log_a(1)$	$\log_a\left(1/625\right) = 5$	$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2$
$\log_5(x) = 2$		

Oppgave 6

a) $\ln e + 2\ln 1$ b) $\ln e^2$ c) $\ln a + 2\ln\sqrt{a} - \ln a^2$

d) $\ln\left(3a^2\right) + 2\ln a - \ln\left(a^4\right)$ e) $\ln e^x$

f) $\ln a^3 + 3\ln\sqrt[3]{a} - 2\ln a^2$

Oppgave 7

Skriv så enkel som mulig:

a) $e^{3\ln x}$ b) $e^{2\ln\sqrt{x}}$ c) $e^{2\ln x + \ln 5}$

Fasit:

6) a) 1 b) 2 c) 0 d) $\ln 3$ e) x f) 0

7) a) x^3 b) x c) $5x^2$

Noen regneregler

$e^{\ln A} = A$,	$10^{\log A} = A$
$e^{n\ln A} = A^n$,	$10^{n\log A} = A^n$

Eksempel

Vis at: $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$

$\log_a b = n \Rightarrow \quad b = a^n \quad \Rightarrow \ln b = n \ln a \quad \Rightarrow n = \dfrac{\ln b}{\ln a} \Rightarrow \quad \log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$

Noen Kommentarer og nye formler:

1) $\log_b x$ definert bare når $x > 0$

2) $\log_b b^x = x$ for alle $x > 0$

3) $\log_b b = 1$

4) $\log_b 1 = 0$

5) $b^{\log_b x} = x$ for alle $x > 0$

Skifte av grunntall

i) $\log_b x = \dfrac{\log x}{\log b}$

ii) $\log_b x = \dfrac{\ln x}{\ln \mathbf{b}}$

iii) $\log_b x = \dfrac{1}{\log_x b}$

Logaritmiske ligninger

Eksempel

Eks.

Løse ligningene:

a)	b)
$\log_3(x) + \log_3(2x-3) = 2$	$\log_2(x) + \log_2(x-3) = 2$
Fasit:	Fasit:
$\log_3(x(2x-3)) = 2$	$\log_2(x(x-3)) = 2$
$x(2x-3) = 9$	$x(x-3) = 4$
$2x^2 - 3x - 9 = 0$	$x^2 - 3x - 4 = 0$
$x_1 = -1{,}5$, $x_2 = 3$	$x_1 = -1$, $x_2 = 4$

a) Husk $\log_b(x)$ er kun definert for positive verdier av både *b* og *x*.

Sjekk svarene:

$x_1 = -1,5$: $\log_3(-1,5) + \log_2(-6)$

Vi kan ikke ha negative argumenter i logaritmene. $x_1 = -1,5$ er da ikke en løsning.

$x_2 = 3$: $\log_3(3) + \log_3(3) = 2$. OK.

Dermed $\underline{\underline{x_2 = 3}}$ er løsning.

Oppgave 8

a) $\log_5(x+3) = 2$ b) $\log_3(x+3) + \log_3(x-3) = 3$

c) $\log_2(x) - \log_2(x+2) + 1 = 0$ d) $2\ln x + \ln x^3 = 10$

Fasit

a) $x = 5^2 - 3 = 22$ b) $(x+3)(x-3) = 3^3$; $x^2 = 36$; $\underline{\underline{x = 6}}$

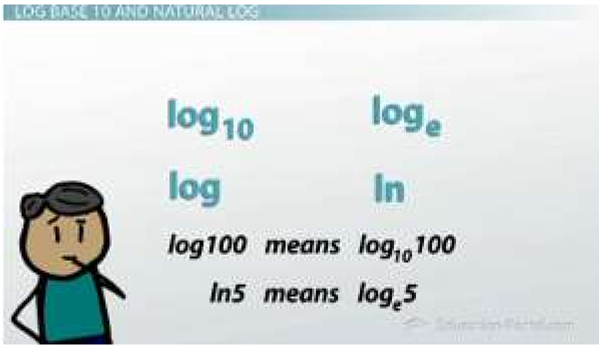
c) $\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2}$ og dermed $x = 2$ d) $x^5 = e^{10}$; $\underline{\underline{x = e^2}}$

Briggske og naturlige logaritmer

Logaritmer med grunntallene 10 og $e \approx 2,71828$ kalles for briggske og naturlige logaritmer og noteres slik:

$\log_{10}(x) = \lg(x)$

$\log_e(x) = \ln(x)$



Legg merke til at substitusjoner kan være nyttige til å løse ligninger. E god del i vårt pensum kan omskrives om 2. gradsligninger.

$3(\ln(x))^2 - \ln(x) + 1 = 0$ $3u^2 - u + 1 = 0, \quad u = \ln(x)$	$e^{2x} - 3e^x = 4$ $u^2 - 3u - 4 = 0, \quad u = e^x$
$2x^4 - x^2 - 1 = 0$ $2u^2 - u - 1 = 0, \quad u = x^2$	$e^x - 6e^{-x} = 1$ $u^2 - u - 6 = 0, \quad u = e^x$
$x - \sqrt{x} = 20$ $u^2 - u - 20 = 0, \quad u = \sqrt{x}$	$x - \frac{5}{x} = 4$ ganger begge sider med x. $x^2 - 4x - 5 = 0$

Oppgave 9

Løs ligningene:

a) $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$ b) $(\lg x)^2 - 3\lg x + 2 = 0$

Oppgave 10

Løs ligningene:

a) $5^x = 7$ b) $3^{2x-1} = 5$ c) $e^{x^2-1} = 3$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 27$ e) $e^x + 2e^{-x} = 3$ f) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{3}{5}$

Oppgave 11

Løs ligningene:

a) $\lg(3x) = 5$ b) $(\lg x)^2 = 4$ c) $\ln x + \ln(2-x) = 0$

Fasit:

9 a) $\{0,1\}$ b) $\{10, 100\}$

10 a) $x = \ln\frac{7}{5}$ b) $x = \frac{1}{2}(1 + \ln\frac{5}{3})$ c) $x = \pm\sqrt{1+\ln 3}$

d) $x = -\frac{3}{2}$ e) $x = \{0, \ln 2\}$ f) $x = \ln 2$

11

a) $x = \frac{10^5}{3}$ b) $x = 10^{\pm 2}$ c) $x = 1$

EKSTRA materialet til selvstudium

Vekstfaktor *b*

La $y(t)$ være en størrelse som vokser/avtar eksponentielt.
Anta at y endres med *vekstfaktoren b* over et *intervall av lengde T*:

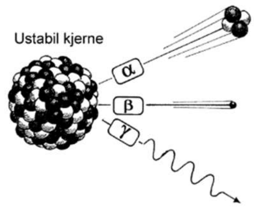
$$y(t) = y_0 \cdot b^{\frac{t}{T}}$$

Bemerk at dersom $b>1$, stiger funksjonen ellers synker funksjonen ($b<1$).

Bra at du leser og lærer litt om grenseverdi før du leser resten av notatene her.
Du finner notater for grenseverdi og kontinuitet i notater for oppfriskningskurset.

Eksempel

Halveringstid til plutonium-241 er 14,4 år.
Hvor mye av en mengde på 5 gram vil være igjen etter 60 år?

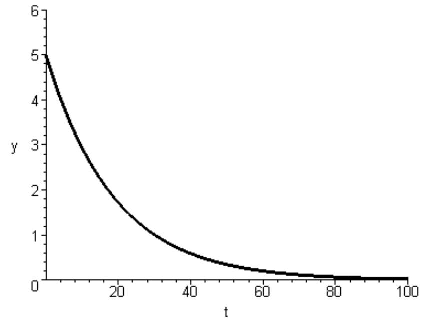


Stoffmengden $y(t)$ ved tiden t kan uttrykkes ved:

$$y(t) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{14.4}}$$

Etter 60 år: $y(60) = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{60}{14,4}} \approx 0,204\,\text{g}$

Altså er det 204 milligram igjen etter 60 år.



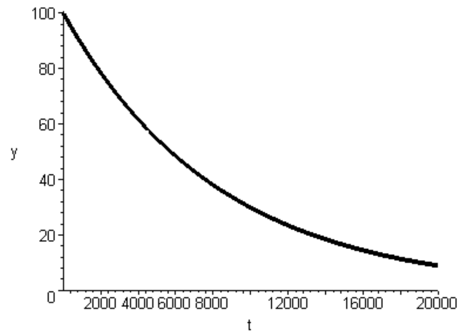
Eksempel

t år etter at en organisme døde, er andelen av C14-isotoper redusert til p % av mengden i den levende organismen. Halveringstid er 5730 år. Sett opp en funksjon som beskriver $p(t)$. Hvor mange prosent av en C14-isotop er igjen etter 1000 år

$$p(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}} \quad \text{eller} \quad p(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$$

Grafen til $f(t) = 100 \cdot 2^{-\frac{t}{5730}}$ er tegnet her:

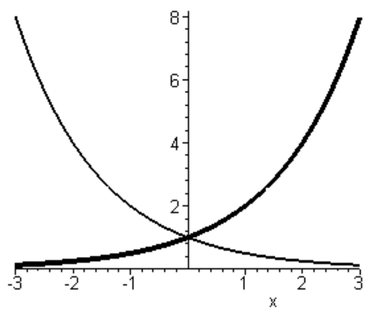
Etter 1000 år: $p(1000) = 100 \cdot 2^{-\frac{1000}{5730}} \approx \underline{\underline{88,6\%}}$



Eksponentialfunksjoner $f(x) = a^x$ og $f(x) = e^x$

Dersom $a > 0$, representerer $f(x) = a^x$ en eksponentialfunksjon.

Noen bemerkninger:
Kommentar 1)
Funksjonen $f(x) = a^x$ går gjennom punktet $(0\,,1)$: $a^0 = 1$

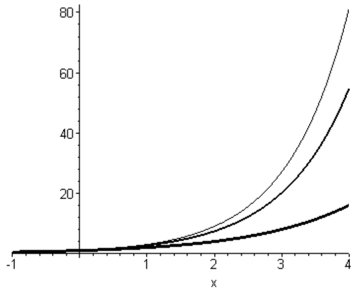


$$f(x)=a^x \quad a>0 \quad \begin{cases} \text{eksponentiell vekst når} & a>1 \quad \text{for eks.} \quad y=2^x \\ \text{eksponentiell reduksjon når} & 0<a<1 \quad \text{for eks.} \quad y=(\frac{1}{2})^x \end{cases}$$

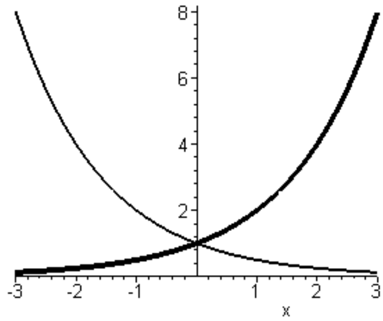
Kommentar 2)

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = 0$ *når* $0<a<1$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x \to 0$ *når* $a>1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \infty$ *når* $a>1$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x \to \infty$ *når* $0<a<1$

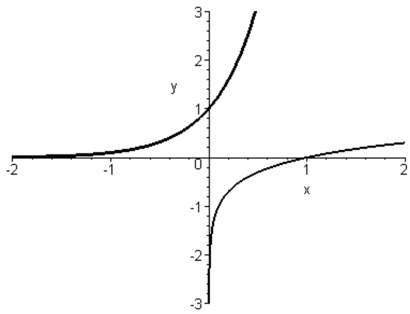


Kommentar 3)
Jo større grunntallet *a* er, jo raskere vokser funksjonen.
Grafen til $y=2^x$ (tykkest), $y=e^x$ og $y=3^x$ er vist her:



Kommentar 4)
$y=(\frac{1}{a})^x = a^{-x}$
Grafen til $y=2^x$ (tykkest), $y=(\frac{1}{2})^x = 2^{-x}$ er vist her:

Inverse funksjoner og en naturlige logaritmefunksjonen



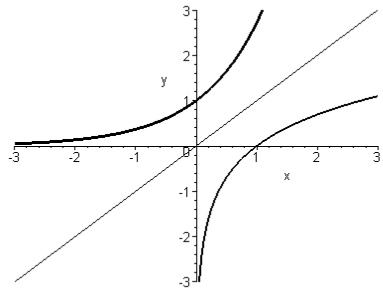
Når $a>0$ gjelder: $\boxed{y=a^x \quad \Leftrightarrow \quad x=\log_a y}$

og dette kan bety at $y=\log_a x$ er inversfunksjonen til $y=a^x$

$$f(x)=10^x \Rightarrow f^{-1}(x)=\log x \text{ (se grafen)}$$
$$f(x)=e^x \Rightarrow f^{-1}(x)=\ln x$$

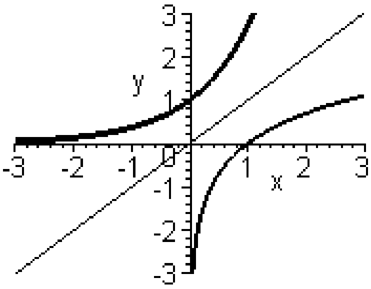
Den naturlige logaritmefunksjonen

Dersom grunntallet i logaritmen er "e", kalles logaritmen *den naturlige logaritmen.* $y=e^x$ og $y=\ln x$ er inversfunksjoner.



- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x \to \infty$ og $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x \to 0$ ($y=0$ er horisontal asymptote for $y=e^x$)
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x \to -\infty$ og ($x=0$ er vertikal asymptote for $y=\ln x$)

Logaritmefunksjoner $f(x)=\log x$ og $f(x)=\ln x$.



Når $a>0$ gjelder: $\boxed{y=a^x \quad \Leftrightarrow \quad x=\log_a y}$

og dette kan bety at $y=\log_a x$ er inversfunksjonen til $y=a^x$

$$f(x)=10^x \Rightarrow f^{-1}(x)=\log x$$
$$f(x)=e^x \Rightarrow f^{-1}(x)=\ln x \quad \text{(se grafen)}$$

Halveringstid
Mengden av et bestemt radioaktivt stoff i en prøve avtar eksponentielt med tiden og følger en funksjon av typen: $y(t)=y_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}$

Halveringstid T eller $T_{\frac{1}{2}}$ er tiden det tar før stoffmengden er halvert: $y(T)=y_0\cdot e^{-\lambda\cdot T}=\frac{y_0}{2}$

Vi ønsker å bestemme T

$$e^{-\lambda\cdot T}=\frac{1}{2}$$

$$\ln e^{-\lambda\cdot T}=\ln(\frac{1}{2})\Rightarrow -\lambda\cdot T=-\ln 2\Rightarrow T=\frac{\ln 2}{\lambda}$$

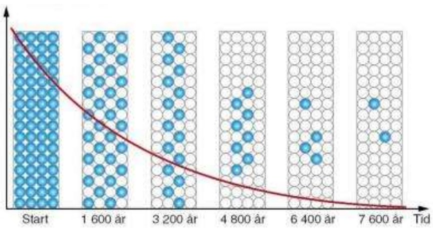
$\boxed{T=\frac{\ln 2}{\lambda} \text{ er Halveringstid}}$

Bemerk: $\ln e^{-\lambda\cdot T}=-\lambda\cdot T$ og

$\ln(\frac{1}{2})=\ln(2^{-1})=-\ln 2$

Eks.

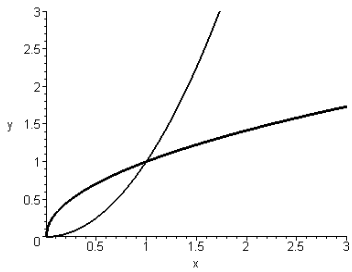
Eksempel Halveringstid til radium er ca. 1600 år: $y(t)=y_0\cdot e^{-\frac{\ln 2}{1600}\cdot t}$ (se figure



Potensfunksjoner $f(x)=x^r$, $x>0$

Kjennetegnet til potensfunksjonen er at grunntallet er variabel (positiv) og eksponenten er konstant.

Her har vi tegnet grafen til $y=x^{0.5}$ (tykkere) og $y=x^2$.



En viktig grensesetning for potensfunksjoner:

$\lim\limits_{x\to\infty} x^r=\infty$ når $r>0$

$\lim\limits_{x\to\infty} x^r=0$ når $r<0$

Oppgave 1
Folketallet i en bygd ved 1. januar 2000 var 1500.
Vi regner med at bygdens befolkning vokser med ca. 3 % pr. år.

a) Sett opp en funksjon $N(t)$ som beskriver folketallet t år etter året 2000.
b) Hva er folketallet til bygda i slutten av 2005 etter denne modellen.

Oppgave 2
Løs ligningene:
a) $e^{2x} = 5$ b) $5e^{2x} = 11$ c) $3e^{5x} - 7 = 0$

Oppgave 3
Løs ligningene:
a) $e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$ b) $e^{x} + 2e^{-x} - 3 = 0$

Oppgave 4
Løs ligningene:
a) $2\ln x - 1 = 0$ b) $3\ln x + \ln x^2 = 9$

c) $2^x = 6$ d) $5 \cdot 3^x = 7$

Fasit

1) a) $N(t) = 1500 \cdot (1{,}03)^t$ b) $N(6) = 1500 \cdot (1{,}03)^6 \approx 1791$

2) a) $x = \frac{1}{2}\ln 5$ b) $x = \frac{1}{2}\ln\frac{11}{5}$ c) $x = \frac{1}{5}\ln\frac{7}{3}$

3) a) $x = 0 \vee x = \ln 2$

b) Hvis man multipliserer begge sider med e^x, får man samme ligning som i del a)
$x = 0 \vee x = \ln 2$

4) a) $x = e^{\frac{1}{2}}$ b) $x = e^{\frac{9}{5}}$

c) $x = \frac{\ln 6}{\ln 2}$ d) $x = \frac{\ln\frac{7}{5}}{\ln 3} = \frac{\ln 7 - \ln 5}{\ln 3}$

+

Trigonometri

Trigonometri er en gren av matematikk som kan klassifiseres i to hoved kategorier; læren om vinkler og sider i en trekant (trekantmåling) og læren om trigonometriske funksjoner som blant annet kan brukes til å studere periodiske fenomener.

Vinkelmål: grader og radianer

Vinkelmålet *radian* er en avledet SI-enhet definert som buelengde delt på radius. Det kalles også for *absolutt vinkelmål*. Andre vinkelmål er grader, som kanskje er mest kjent. 360° tilsvarer 2π radianer. Omregningformelen er: $\frac{\pi}{r} = \frac{180}{d} \Rightarrow r = \frac{\pi}{180} d$

Eksempel

Omgjør 30, 45, 60, 90 og 360 grader til radianer.

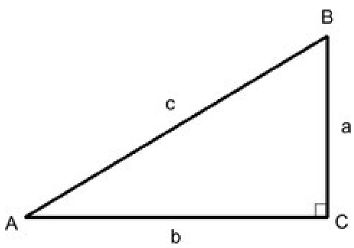
Vi vet at: $180^o = \pi^{rad}$, dermed: $30^o = \frac{\pi}{6}^{rad}, 45^o = \frac{\pi}{4}^{rad}, 60^o = \frac{\pi}{3}^{rad}, 90^o = \frac{\pi}{2}^{rad}, 360^o = 2\pi^{rad}$

1) Trigonometri i grader

Hvordan kan vi finne sider og vinkler i en rettvinklet trekant? (pytagoras setning)
Hvordan kan vi finne sider og vinkler i en vilkårlig trekant? (Sinus- og cosinus setning)

Trekantberegninger

Pytagoras setning
I en rettvinklet trekant gjelder sammenhengene:

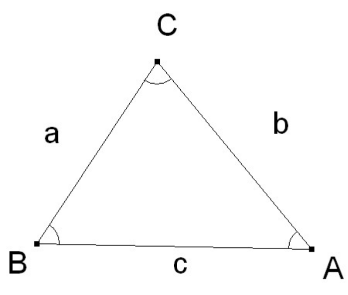


$c^2 = a^2 + b^2$

$\sin(A) = \frac{a}{c} \quad \cos(A) = \frac{b}{c}$

Arealet til trekanten er da: $\mathbf{A} = \frac{a \cdot b}{2}$

Cosinussetningen:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ac\cos(C)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(B)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$$

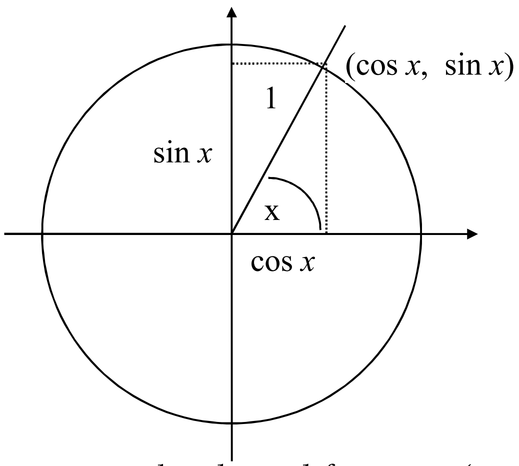
Sinussetningen: $\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$

Arealsetningen $A = \frac{1}{2} a \cdot b \ \sin(\mathrm{C}) = \frac{1}{2} a \cdot c \ \sin(\mathrm{B}) = \frac{1}{2} b \cdot c \ \sin(\mathrm{A})$

Arealet kan også skrives som: $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ der $p = \frac{a+b+c}{2}$

Enhetssirkelen og noen kjente vinkler

- **Enhetssirkel, sinus, cosinus og tangens**



Figuren til venstre viser de grunnleggende definisjonene av de trigonometriske funksjonene.

- Enhetssirkel (en sirkel med radius 1 med sentrum i origo)
- Cosinus-aksen (horisontalaksen)
- Sinus-aksen (vertikalaksen)
- Skjæringspunktet mellom denne linjen og enhetssirkelen har da koordinatene: $(\cos x, \sin x)$.
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Med utgangspunkt i denne definisjonen (og Pytagoras' setning) får vi at:

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1}$$

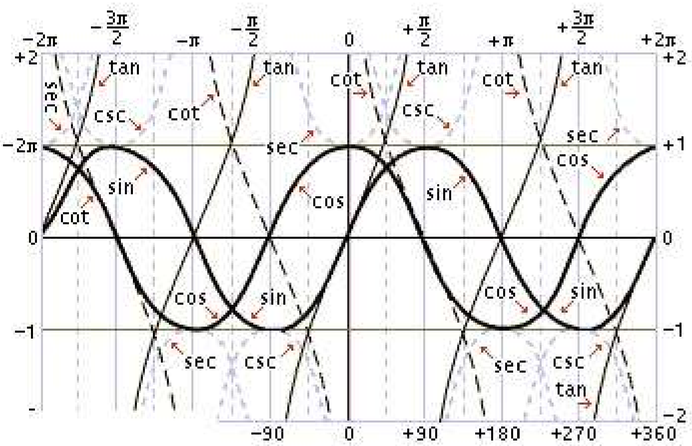
Ved hjelp av enhetssirkel kan vi sette opp følgende:

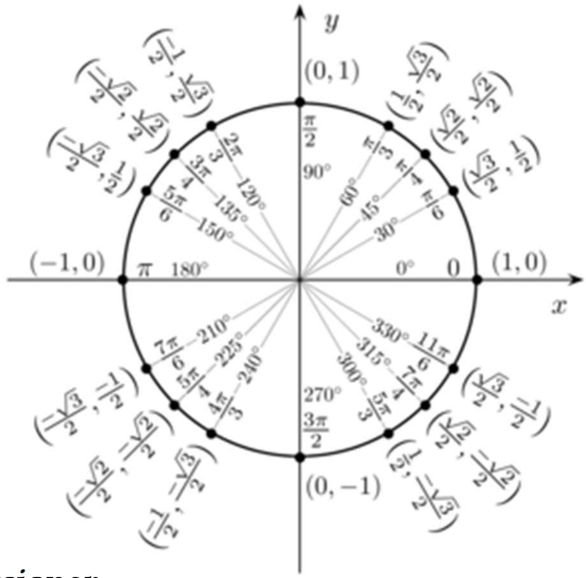
$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x \qquad \tan(\pi - x) = -\tan(x)$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \tan(\pi + x) = \tan(x)$$

Noen kjente vinkler

Vinkel	Radianer	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45^0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90^0	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞
180°	π	0	-1	0
270^0	$\frac{3\pi}{2}$	-1	0	$-\infty$
360^0	2π	0	1	0

Kjente vinkler



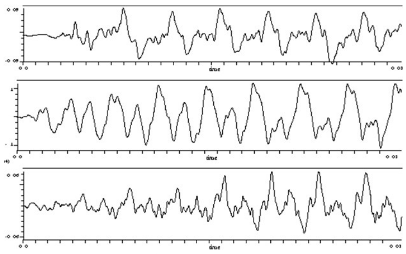


2) Trigonometri i radianer

Periodiske fenomener og trigonometriske funksjoner

I naturen gjentar det seg noen fenomener over et bestemt tidsperiode. Har man informasjon om fenomenet i denne tidsperioden, kan man bruke trigonometriske funksjoner til å beskrive fenomenet over flere tidsperioder.

Periodiske funksjoner $f(x) = f(x+p)$

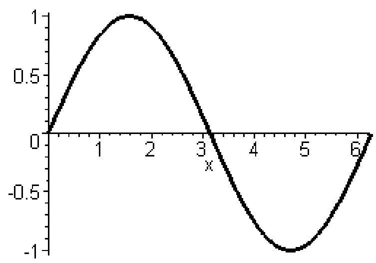


Enhver funksjon som gjentar seg med visse intervall, *p*, er periodisk. Senere i andre semester lærer vi å sette opp ved hjelp av sinus og cosinus funksjoner fourier-rekken til periodiske funksjoner som er stykkevis kontinuerlige.

Sinus, cosinus og tangens

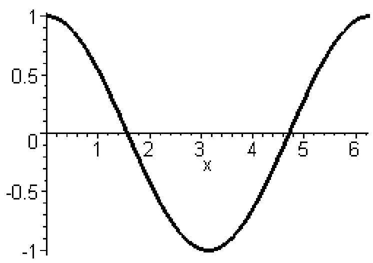
Sinusfunksjon

$y = \sin x \quad 0 \le x \le 2\pi$



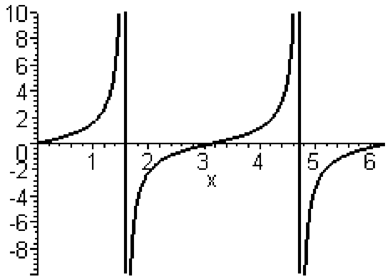
Cosinusfunksjon

$y = \cos x \quad 0 \le x \le 2\pi$



Tangensfunksjon

$y = \tan x \quad 0 \le x \le 2\pi$

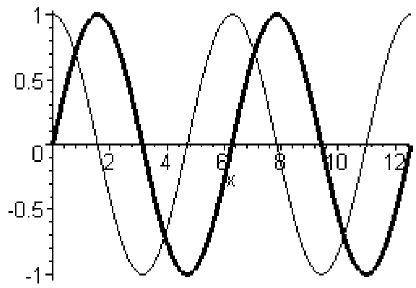


Legg merke til at perioden til sin og cos er 2π , mens for tan er den π :

$\sin x = \sin(x + 2\pi)$, $\cos x = \cos(x + 2\pi)$, $\tan x = \tan(x + \pi)$

Grafen til en sinusfunksjon og en cosinusfunksjon har $\frac{\pi}{2}$ faseforskjell:

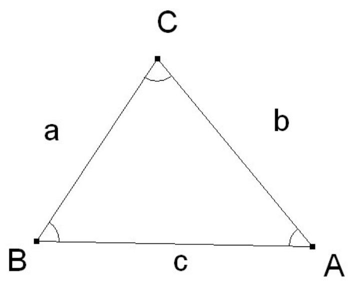
$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$	$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$



Formler

Cosinussetningen: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(A)$

Sinussetningen: $\dfrac{\sin(A)}{a} = \dfrac{\sin(B)}{b} = \dfrac{\sin(C)}{c}$



Trigonometriske formler

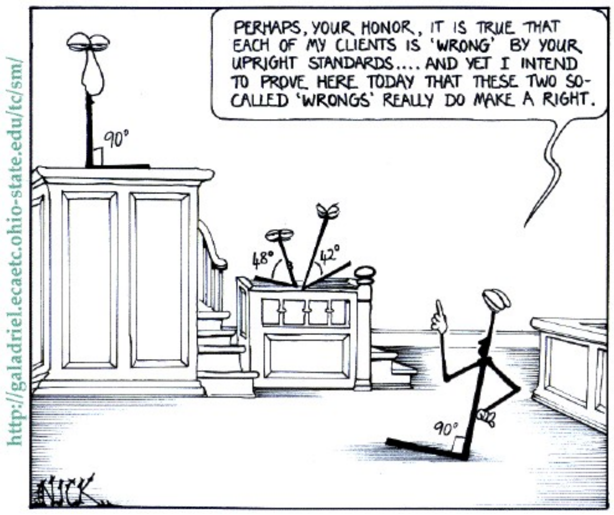
Grunnleggende formler:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ (enhetsformel)}$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

Trigonometriske formler for "$x \pm y$"

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$,
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \cdot \tan y}$



Trigonometriske formler for "$2x$"

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

Andre formler:

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}(\cos(u+v) + \cos(u-v))$$

$$\sin u \sin v = \frac{1}{2}(\cos(u-v) - \cos(u+v))$$

$$\sin u \cos v = \frac{1}{2}(\sin(u+v) + \sin(u-v))$$

Eks.

Eksempel

Finn eksakte verdier for:

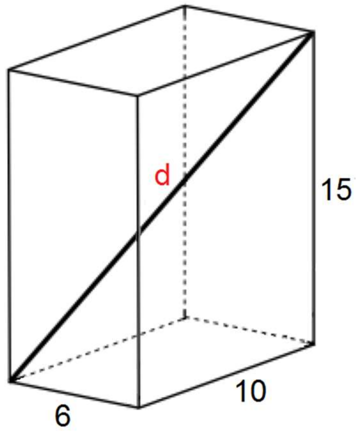
a) $\sin\dfrac{5\pi}{6}$ b) $\tan\dfrac{5\pi}{4}$ c) $\cos\dfrac{5\pi}{3}$

(Hint: Bruk tabell for kjente vinkler, vinklene $x \pm \pi$ og $2x \pm \pi$ og enhetssirkelen eller formler)

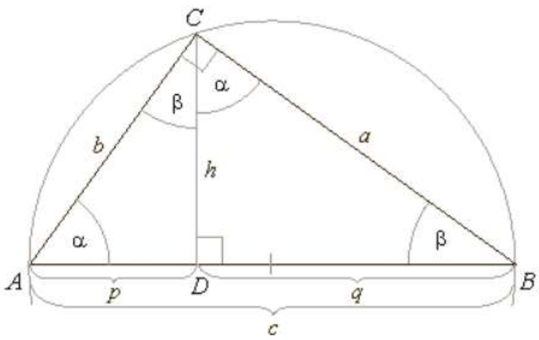
Fasit:

a) $\dfrac{1}{2}$ b) -1 c) $\dfrac{1}{2}$

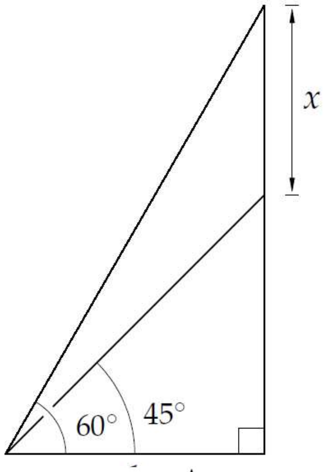
Oppgave 1
Bestem lengden av diagonalen d.



Oppgave 2
Vis at høyden $h = \sqrt{p \cdot q}$

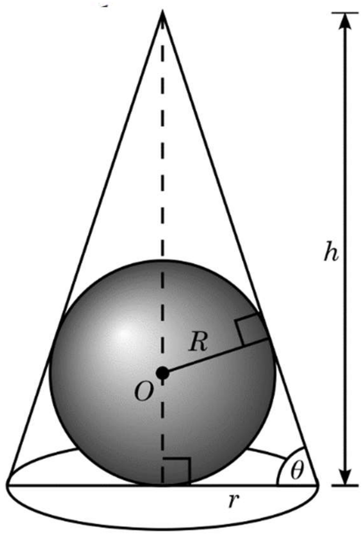


Oppgave 3
Bestem lengden av linjestykket som merket med x.



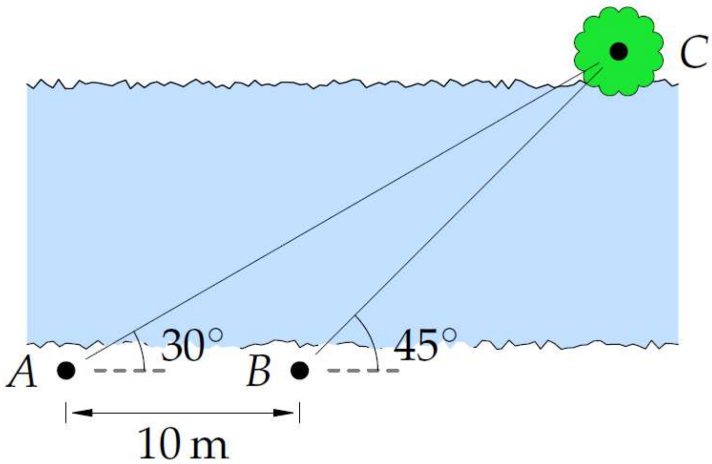
Oppgave 4
En kule(med radius **R**) er plassert i en rett kjegle(med radius r og høyden h) som vist på figuren. Vis at $R = \dfrac{h}{\tan\theta}\tan(\dfrac{\theta}{2})$

Hint:
linjen fra hjørnet til vinkelen θ til senter til kulen halverer vinkelen θ.



..

Oppgave 5
Bestem lengden av linjestykkene AC og BC:



Oppgave 6

La x være en vinkel i 1. kvadrant. Finn (uten å bruke kalkulator) sin x og cos x når:

a) $\tan x = \sqrt{3}$ b) $\tan x = 1$ c) $\tan x = \frac{5}{12}$

Oppgave 7

a) Bruk grafene til sin x, cos x at $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$

b) Vis de samme sammenhengene $\sin(\pi - x) = \sin x$ og $\cos(2\pi - x) = \cos x$ ved hjelp a definisjonene av sin x og cos x i enhetssirkelen.

Oppgave 8 - Her kan du bruke tabell for kjente vinkler

a) Benytt 45° + 30° = 75° til å finne eksakte verdier for sin 75° og cos 75°.
b) Benytt $45° - 30° = 15°$ til å finne eksakte verdier for sin 15° og cos 15°.
Bruk disse til åangi eksakte verdier til sin 165° og cos 165°.

Oppgave 9

a) Gitt $\cos x = \frac{1}{3}$. **Bestem** eksakte verdier for $\cos 2x$ og $\sin 2x$ når x ligger i første kvadrant.

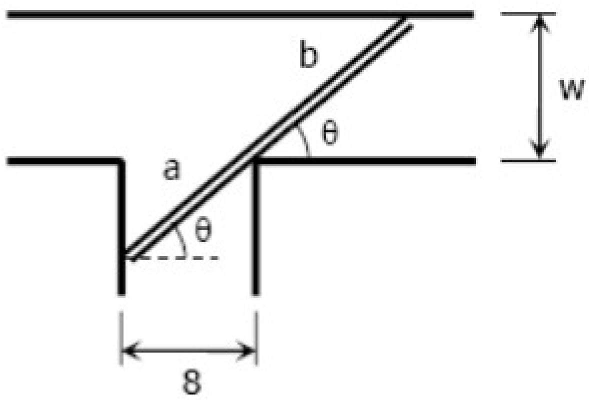
b) Gitt $\cos 2x = -\frac{1}{9}$. **Bestem** eksakte verdier for $\cos x$ når x ligger i første kvadrant.

Oppgave 10

Figuren viser to korridorer med lengdene w og B meter som møtes i hjørne. Vi skal bære en bjelke med lengde L gjennom korridorene og kunne snu rund hjørnet.

a) Vis at $L = \frac{w}{\sin\theta} + \frac{B}{\cos\theta}$.

b) Vis at $w = L\sin\theta - B\tan\theta$.



Oppgave 11

Vis at

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{2}{\sin\theta}$$

Fasit

1) $d = \sqrt{6^2 + 10^2 + 15^2} = 19$

2) Formlike trekanter $\frac{h}{p} = \frac{q}{h}$ som gir $h = \sqrt{p \cdot q}$.

3) $x = \sqrt{3} - 1$

4) $R = r\tan(\frac{\theta}{2}) = \frac{h}{\tan\theta}\tan(\frac{\theta}{2})$

5) Ved å bruke sinus-setningen:

$$\frac{\sin 15}{10} = \frac{\sin 30}{BC},\ BC = \frac{5}{\sin 15} \approx 19,3\ ,\quad \frac{\sin 15}{10} = \frac{\sin 135}{BC},\ BC = \frac{5\sqrt{2}}{\sin 15} \approx 27,3$$

6) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \frac{1}{2}$ b) $\sin x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sin x = \frac{5}{13}$, $\cos x = \frac{12}{13}$

7) a) Det er bare å tegne grafen til $y = \sin x$ og flytte den med $\frac{\pi}{2}$ mot venstre og den overlapper da grafen til $y = \cos x$.

b) Ved å tegne vinklene $(\pi - x)$ og x i enhetssirkelen, ser vi at de har samme sinus verdi.

Ved å tegne vinklene $(2\pi - x)$ og x i enhetssirkelen, ser vi at de har samme cosinus verdi.

8) a) $\sin 75^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ $\cos 75^o = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\sin 15^o = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ $\cos 15^o = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 165^o = \sin 15^o = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

$\cos 165^o = -\cos 15^o = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

9) a) Gitt $\cos 2x = 2(\frac{1}{3})^2 - 1 = \underline{\underline{-\frac{5}{9}}}$. $\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2\sqrt{1-(\frac{1}{3})^2}\,\frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{4\sqrt{2}}{9}}}$

b) Gitt $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = \frac{4}{9}$, **dermed** $\underline{\underline{\cos x = \frac{2}{3}}}$ (x ligger i første kvadrant)

10) det er lett å bruke sin og cos i trekantene som har vinkel θ og viser relasjonene man skulle bevise.

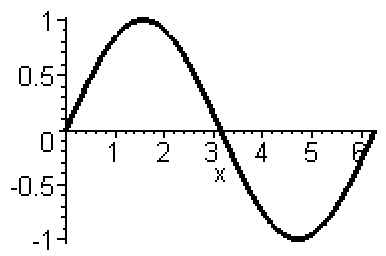
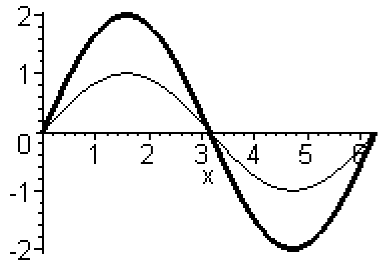
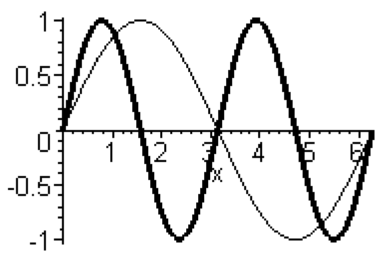
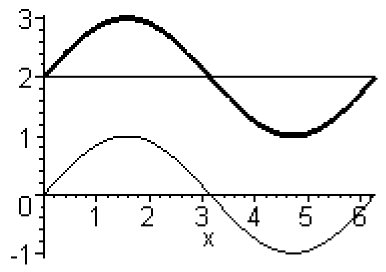
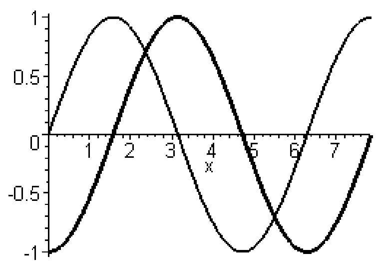
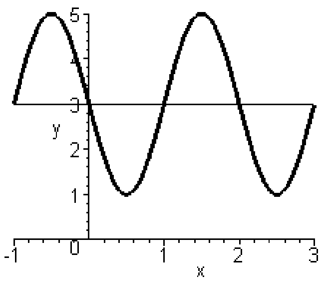
11)

$$\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta} = \frac{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \frac{1+2\cos\theta+\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$$

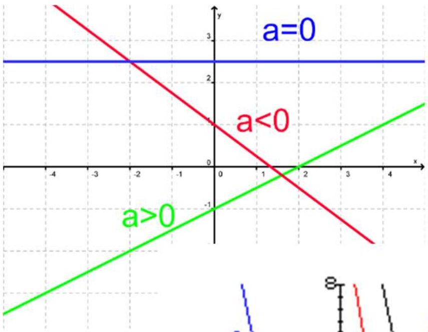
$$= \frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta(1+\cos\theta)} = \underline{\underline{\frac{2}{\sin\theta}}}$$

Ekstra notater

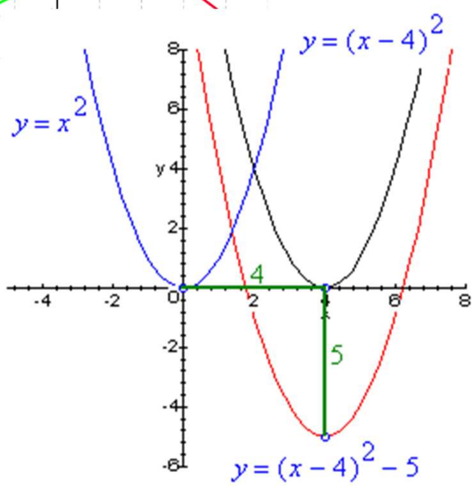
Noen eksempler for å studere disse parameterne: $y = C_0 + C_1 \sin \omega(x - x_0)$

$C_0 = 0$, $C_1 = 1$, $T = 2\pi$	**Amplitude** C_1 er fordoblet	**Sirkelfrekvens** ω er fordoblet
$y = \sin x$ 	$y = \sin x$ og $y = 2\sin x$ 	$y = \sin x$ og $y = \sin 2x$ 
C_0 **Likevektslinje** $C_0 = 2$	**Akrofase** $t_0 = \pi/2$	$C_0 = 3$, $C_1 = 2$, $\omega = \pi$ og $t_0 = 1$
$y = \sin x$ og $y = 2 + \sin x$ 	$y = \sin x$ og $y = \sin(x - \frac{\pi}{2})$ 	$y = 3 + 2\sin \pi(x - 1)$ 

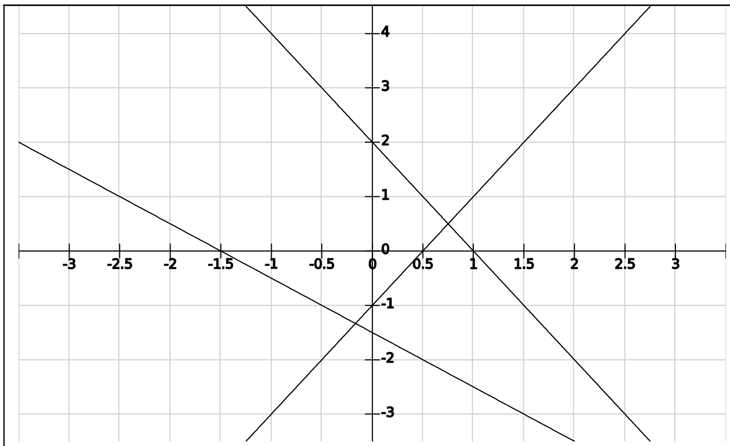
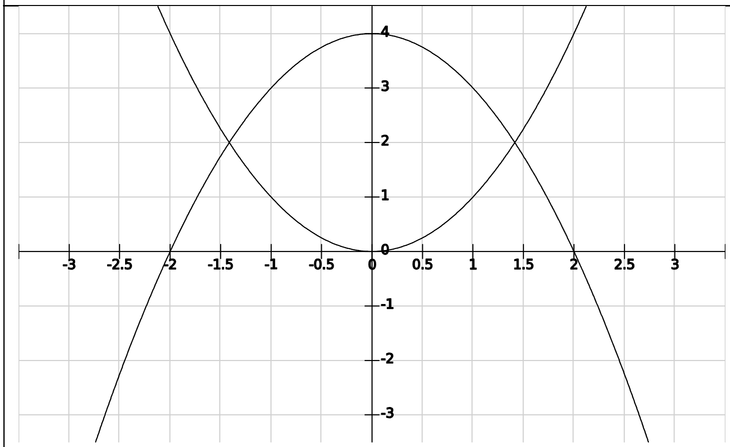
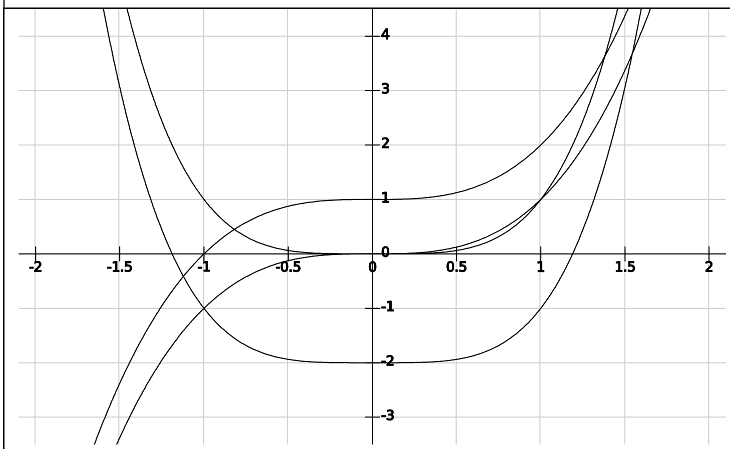
Ellers jeg kommer til å ta litt om
Grafer til funksjoner
Rette linjer $y = ax + b$



Andre gradsfunksjoner
$y = ax^2 + bx + c$



Potensfunksjoner $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$
Sirkler, ellipser, parabler, parabler og hyperbler.

	$y = ax + b$ For hvilke(n) er $a > 0$? For hvilke(n) er $a < 0$? Sett opp ligningen til linjene.
	$y = ax^2 + bx + c$ Sett opp ligningen til parablene.
	Hvilken graf viser grafen til $y = x^3$ $y = x^3 + 1$ $y = x^4$ En av grafene er grafen til $y = x^4 + c$ Bestem c.