Uendelige rekker. Konvergens og konvergenskriterier

$$Uendelig\ rekke: \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots$$

*Et absolutt **nødvendig, men ikke tilstrekkelig** vilkår for **konvergens** er at:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Konvergens vha. delsummer

$$\boldsymbol{Delsummer}: \quad S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i \quad , \ dvs. \quad S_1 = a_1 \ , \ S_2 = a_1 + a_2 \ , \ S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \ , \quad osv.$$

$En\ uendelig\ rekke$ $\boldsymbol{konvergerer}$ $med\ sum\ S\ hvis\ \lim_{n\to\infty} S_n\ eksisterer$

*I motsatt fall **divergerer** rekka.*

Eksempel 1:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16}\right) + \cdots$$

$Delsummer:$

$$S_1 = \left(\frac{1}{2}\right), \quad S_2 = S_1 + \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \ , \quad S_3 = S_2 + \left(\frac{1}{8}\right) = \frac{7}{8}, \quad S_4 = S_3 + \left(\frac{1}{16}\right) = \frac{15}{16} \ , \ osv.$$

$$Alt\ tyder\ på\ at\ \ S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{m\to\infty}\left(\frac{m}{m+1}\right) = 1 \ , \ dvs. rekka\ konvergerer\ med\ sum\ lik\ 1$$

Eksempel 2:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \cdots = 1 + 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 + \cdots$$

$Delsummer:$

$$S_1 = S_2 = S_5 = S_6 = \cdots = 1 \quad , \quad mens \quad S_3 = S_4 = S_7 = S_8 = \cdots = 0$$

S_n $veksler$ ("oscillerer") $mellom\ 0\ og\ 1\ , dvs.\ \lim_{n\to\infty} S_n\ \ eksisterer\ ikke.$ *Rekka **divergerer.***

Eksempel 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+3)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right)$$

$$Delsum: \ S_n = \sum_{m=1}^{n}\left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}$$

$$Rekka\ \boldsymbol{konvergerer}\ med\ sum\ \ S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Uendelige geometriske rekker

$(Uendelig)\ geometrisk\ rekke: \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a + a \cdot r + a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + \ \dots \ = \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1}$

$Delsum\ (n\ ledd): \ S_n = a\ (\ 1 + r + r^2 + r^3 + \ \dots + \ r^{n-1}\ )$

$Da\ må: \quad r \cdot S_n = a\ (\ r + r^2 + r^3 + \ \dots + \ r^{n-1} + r^n\ )$

$Det\ gir\ en\ formel\ for\ delsummen: \quad S_n - r \cdot S_n = (1-r)S_n = a(1-r^n) \quad \Rightarrow$

$$S_n = a \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$$

$Vi\ innser\ at\ dersom\ \ |\, r\, | < 1 \quad vil \ \lim_{n\to\infty} r^n = 0 \ \ og\ dermed:$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \ = \ \frac{a}{1-r}$$

Altså: En uendelig geometrisk rekke **konvergerer hvis og bare hvis** $|\, r\, | < 1$

p-rekketest

$p - rekker\ generelt: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \ = \ 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots$

hvor: p er et positivt tall

$Rekka\ \boldsymbol{konvergerer}\ \ hvis: \ p\ > 1 \quad og\ \ \boldsymbol{divergerer}\ for: \ 0 < p \le 1$

$Eksempler: \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ \ konvergerer\ fordi\ \ p = 2\ > 1\ \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \ \ divergerer\ fordi\ \ p = \frac{2}{3} < 1$

Med p = 1 får vi den ***harmoniske rekke***:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ = \ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

I henhold til kriteriet vil også den harmoniske rekke divergere, dvs.

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \ \to \ \infty$$

Likevel vil vi ofte støte på denne rekka fordi den danner et slags grensetilfelle mellom konvergens og divergens og derfor er fin å sammenlikne andre rekker med.

Merk!

Selv når en p-rekke **konvergerer** (p > 1), finnes det ingen enkel formel for å beregne summen $S = \lim_{n\to\infty} S_n$

Det gjelder generelt for de fleste uendelige rekker. (Geometriske rekker er ett av få unntak).

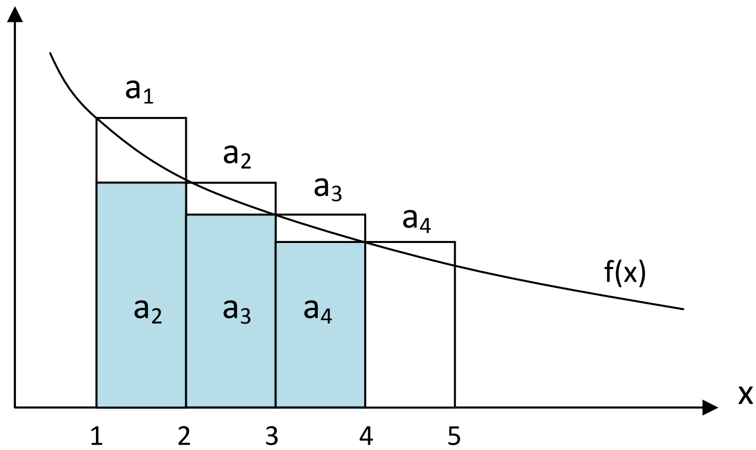
Integraltesten.

Metoden går på å sammenlikne rekka

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots \quad med\ en\ kontinuerlig\ funksjon\ \ f(x)$$

Det forutsettes at leddene er positive ($a_i > 0$), monotont avtagende ($a_{i+1} < a_i$) og at:

$$f(n) = a_n\,, \qquad for\ n = 1,2,3,\dots$$



Da ser vi av figuren (areal-betraktning) at:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n = a_2 + a_3 + \cdots \;<\; \int_1^{\infty} f(x)dx \;<\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots$$

Det innebærer at rekka og integralet enten begge konvergerer eller begge divergerer.

Hvis integralet konvergerer, $\int_1^{\infty} f(x)dx = C\,,$ må altså $\lim_{n\to\infty} S_n = S$

Det er ikke dermed sagt at vi kjenner summen S selv om vi kjenner C.

$Men\ siden\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n$, *innebærer* det *at*: $(S - a_1) < C < S$, *eller*: $C < S < (C + a_1)$

$Vi\ kan\ også\ sette\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \quad og\ dermed\!:\ \ S = S_n + R_n$

Hvor: S_n er summen av de n første leddene, og R_n er ***restleddet***

Med tilsvarende figurbetraktning som over finner vi da at:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(x)dx \;<\; R_n \;<\; \int_n^{\infty} f(x)dx$$

Eksempel 1

$Gitt\ rekka: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots$. $Sammenlikner\ med\ f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

Det betyr at **rekka konvergerer** siden integralet gjør det, men vi er ennå langt unna å finne summen S.

Sammenhengen $C < S < (C + a_1)$ gir bare indikasjonen: $1 < S < 2$

$Imidlertid\ finner\ vi\ lett\ på\ en\ moderne\ kalkulator\ at\ f.eks.\ S_{50} = \sum_{n=1}^{50} \frac{1}{n^2} \approx 1{,}62513$

$Det\ gir\ et\ restledd\ \int_{51}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx < R_{50} < \int_{50}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \rightarrow \quad \frac{1}{51} < R_{50} < \frac{1}{50}$

$Og\ dermed: \quad S = S_{50} + R_{50} \quad \rightarrow \quad 1{,}64474 < S < 1{,}64513$

$(Med\ andre\ metoder\ kan$ det $vises\ at: \quad S = \frac{\pi^2}{6} \approx 1{,}644934$)

Eksempel 2

$Den\ harmoniske\ rekka: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$. $Sammenlikner\ med\ f(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{\infty} = \ln(\infty) - ln(1) = \ln(\infty) \rightarrow \infty$$

Det betyr at den **harmoniske rekka divergerer**, dvs. $lim_{n\rightarrow\infty} S_n \rightarrow \infty$, som tidligere nevnt.

Det kan likevel være morsomt å se hvor "langsomt den divergerer".

Selv om rekka divergerer , vil en bestemt delsum være endelig, dvs. $C_n < S_n < (C_n + 1)$

$$F.eks.\ C_n = \int_1^{10^{434}} \frac{1}{x} dx = \ln(10^{434}) = 434 \cdot \ln(10) \approx 999{,}3$$

Det innebærer altså at $S_n \approx 1000 \quad når \quad n = 10^{434}$

Til sammenlikning anslås antall elementærpartikler i hele universet å være i størrelsesorden 10^{80}

Jamføringstesten (Sammenlikningstesten)

Gitt 2 uendelige, positive rekker ($a_n, b_n > 0$ $for\ alle\ n \geq 1$)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_k + a_{k+1} + \cdots \quad og \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_k + b_{k+1} + \cdots$$

Sistnevnte forutsettes å være en kjent rekke, dvs. en rekke vi med sikkerhet vet konvergerer eller divergerer.

Da har vi:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\boldsymbol{konvergerer}$ $dersom$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $konvergerer\ og$ $\boldsymbol{a_n \leq b_n}$ $for\ alle$ $\boldsymbol{n \geq k}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\boldsymbol{divergerer}$ $dersom$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $divergerer\ og$ $\boldsymbol{a_n \geq b_n}$ $for\ alle$ $\boldsymbol{n \geq k}$

(Punktet $n \geq k$ er nødvendig fordi de første k leddene ikke avgjør om rekke konvergerer eller ei)

Eksempel 1

Rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ $\boldsymbol{konvergerer}$

Begrunnelse: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $konvergerer\ (eksempel\ 1, side\ 4),\ og$ $\frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$ $for\ alle\ n \geq 1$

Eksempel 2

Rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}}$ $\boldsymbol{divergerer}$

Begrunnelse: $\frac{1}{\sqrt{3n-2}} > \frac{1}{\sqrt{3n}}$ $for\ alle\ n \geq 1$, og $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ $divergerer$

At den siste summen divergerer vet vi ut i fra p-rekketesten side 2 (Her: $p = \frac{1}{2} < 1$)

Grensetest (tillegg til jamføringstesten)

$Hvis$ $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ $eksisterer\ vil\ begge\ rekkene\ enten\ konvergere\ eller\ divergere$

Eksempel

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\ konvergerer.\ Hva\ med \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+n}{n^4+\sqrt{n}}\ ?$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2+n}{n^4+\sqrt{n}} \cdot \frac{n^2}{1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{\sqrt{n^7}}} \right) = 3 \quad \Rightarrow \quad Også\ rekka \sum_{n=1}^{\infty} a_n\ \boldsymbol{konvergerer}$$

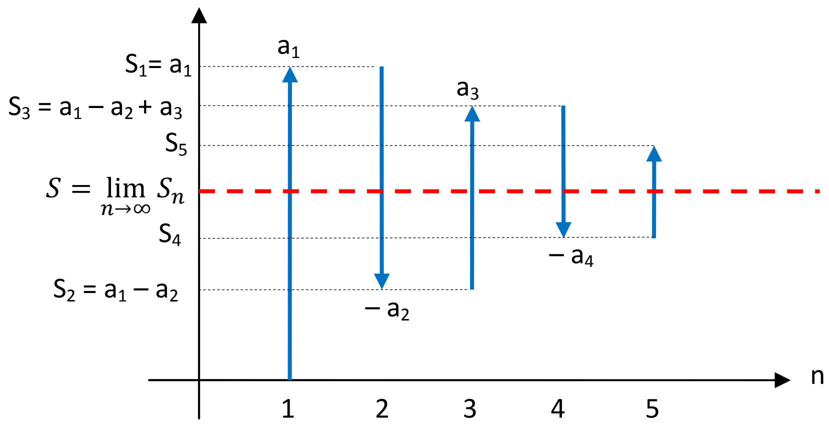
Alternerende rekker

Alternerende rekker er rekker med vekselvis positive og negative ledd.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{k+1}a_k + \cdots \quad , \quad med\ \ a_n > 0$$

$$Rekka\ \boldsymbol{konvergerer}\ \boldsymbol{dersom}\ \ a_n\ >\ a_{n+1}\ \ for\ alle\ n \geq k\ \ \boldsymbol{og}\ \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Dette kan vi illustrere grafisk siden delsummene $S_1 = a_1\ ,\ S_2 = a_1 - a_2\ ,\ S_2 = a_1 - a_2 + a_3\ ,\ osv.$



Vi innser at delsummene må nærme seg en grenseverdi S , dvs. rekka konvergerer.

Eksempel 1

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \ = \ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \quad \boldsymbol{konvergerer}\ fordi\ den\ alternerer\ \boldsymbol{og}\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

Eksempel 2

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\,n}{2n-1} \quad \boldsymbol{divergerer}. \qquad Rekka\ alternerer, \boldsymbol{men}\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Restledd i alternerende rekker:

Som før kan vi skrive: $S = S_n + R_n$, hvor R_n=restleddet. Bare n er stor nok slik at $a_n > a_{n+1}$, innser vi at restleddet i absoluttverdi aldri kan bli større enn første utelatte ledd i delsummen.

$$Dvs.\ når\ \ S_n = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}a_i \ \ , \qquad må:\ \ 0\ < |\,R_n\,| <\ a_{n+1}$$

Eksempel:

$$e^{-x}\ kan\ skrives\ som\ en\ alternerende\ rekke:\ e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$Gir\ f.eks.med\ 3\ ledd:\ \ e^{-\frac{1}{3}} = \ S_3 + \ R_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{2} + \ R_3 = \frac{13}{18} + \ R_3\ , \qquad hvor\ \ |R_3| < \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{3!} = \frac{1}{162}$$

Siden 4.ledd egentlig er negativt innebærer det: $\frac{13}{18} - \frac{1}{162} < e^{-\frac{1}{3}} < \frac{13}{18} \ \Rightarrow\ 0{,}7160 < e^{-\frac{1}{3}} < 0{,}7223$

(Kontroll med kalkulator: $e^{-\frac{1}{3}} \approx 0{,}7165$)

Absolutt konvergens

$Dersom\ rekka\ \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\ \boldsymbol{konvergerer}\ ,vil\ også\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n\ \boldsymbol{konvergere}$

Dette gjelder uansett hvilket fortegn a_n måtte ha.

Eksempel 1

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots \quad er\ geometrisk\ og\ konvergerer\ med\ sum\ S = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

$$Da\ må\ også\ rekkene{:}\ 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\cdots \quad , \qquad -1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots \quad , \qquad etc.\ konvergere$$

Dvs. alle rekker : $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\ ,\ med\ \ |a_n| = \frac{1}{2^n}\ \ vil\ konvergere.$

Eksempel 2

$$Fra\ tidligere{:}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ divergerer\ , \qquad mens\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\ konvergerer$$

Dvs. rekker $med\ \ |a_n| = \frac{1}{n}\ \ er\ bare\ \boldsymbol{betinget\ konvergente}$

Merk! Summen av en absolutt konvergent rekke er konstant, uansett i hvilken rekkefølge vi grupperer leddene. Det behøver ikke være tilfellet for en betinget konvergent rekke!

Forholdstesten (d'Alemberts test)

En mye brukt test som bygger på prinsippet for geometriske rekker.

$$La{:}\ \ \sum_{n=0}^{\infty}a_n = (\ a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\ )+(\ a_n+a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots\ ) = S_n+R_n$$

Vi forutsetter at: $|a_n| > |a_{n+1}| > |a_{n+2}| > \cdots$

Som før nevnt vil delsummen S_n alltid være endelig, så det holder egentlig å undersøke restleddet R_n

$$Omskrevet{:}\ R_n\ = a_n\left(1+\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{a_{n+3}}{a_{n+2}}\cdot\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n+1}}{a_n}+\cdots\right)$$

$$Anta\ nå\ at:\ \ \rho = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1\ .\ \ Da\ må\ det\ finnes\ et\ konstant\ tall\ \ r\ \ slik\ at\ \ \rho \le r < 1$$

$$Men\ da\ må\ også{:}\ \ R_n\ \le\ a_n(1+r\ +\ r^2+r^3+\cdots)\ =\ \frac{a_n}{1-r} \quad (Geometrisk\ rekke)$$

Forholdstesten , forts…

Vi kan følgelig konkludere med:

$$\textit{Gitt rekka rekka}: \sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad La: \quad \rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$Hvis \quad \rho < 1 \quad \Rightarrow \quad Rekka \ \boldsymbol{konvergerer\ absolutt}.$$

$$Hvis \quad \rho > 1 \quad \Rightarrow \quad Rekka \ \boldsymbol{divergerer}.$$

$$Hvis \quad \rho = 1 \quad \Rightarrow \quad Testen\ gir\ ikke\ noe\ svar.\ Vi\ må\ prøve\ andre\ metoder.$$

Eksempel 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n \cdot 2^n}{n!}$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\cdot 2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n\cdot 2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)\cdot 2\cdot 2^n \cdot n!}{(n+1)\cdot n!\cdot n \cdot 2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n}\right) = 0 < 1$$

Rekka **konvergerer** absolutt. (**Merk!** Vi behøver ikke ta hensyn til fortegnsbyttet $(-1)^n$ fordi vi regner i absoluttverdier).

Eksempel 2

Testen fungerer også utmerket for potensrekker.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot x^n}{n} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{x^{n+1}}{(n+1)} \cdot \frac{n}{x^n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1} \cdot x\right) = |\,x\,|$$

Betyr:

Rekka konvergerer absolutt når $\rho = |\,x\,| < 1$, dvs. for $-1 < x < 1$

Rekka divergerer for $|\,x\,| > 1$

For $\rho = |\,x\,| = 1$, dvs. $x = \pm 1$, gir ikke testen noe svar. Men innsatt i rekka får vi:

$$Med\ x = 1: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot 1^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \quad \Rightarrow \quad Konvergerer \quad (jfr.\ eks. 2, side\ 7)$$

$$Med\ x = -1: \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\cdot (-1)^n}{n} = -\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots\right) \quad \Rightarrow \quad Divergerer \quad (jfr.\ harmoniske\ rekke)$$

Konklusjon:

Rekka konvergerer for $-1 < x \leq 1 \quad eller\ ekvivalent: \ x \in \langle -1\,,\ 1\,]$

Rottesten

$$Har: \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad . \qquad Sett: \rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|}$$

Akkurat som for forholdstesten:

$$Hvis \;\; \rho < 1 \quad \Rightarrow \quad Rekka \;\; \boldsymbol{konvergerer\ absolutt}.$$

$$Hvis \;\; \rho > 1 \quad \Rightarrow \quad Rekka \;\; \boldsymbol{divergerer}.$$

$$Hvis \;\; \rho = 1 \quad \Rightarrow \quad Testen\ gir\ ikke\ noe\ svar.\ Vi\ må\ prøve\ andre\ metoder.$$

Eksempel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+(-1)^n}} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \ ....$$

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\,a_n\,|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^n \cdot 2^{(-1)^n}}} = \frac{1}{2} \cdot 1 < 1$$

Rekka konvergerer absolutt.

Merk!

Siden rekka konvergerer absolutt kan vi stokke om rekkefølgen på leddene uten at summen endres.

$$Dvs.\ \ S = \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{32} + \ .... = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \ \ (Geometrisk)$$

"Flytskjema" for å avgjøre om en uendelig rekke konvergerer