13.1 Fourierrekker-Oppsummering

Fourierrekken til en periodisk funksjon f med periode $T = 2L$ er gitt ved

$$F_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \quad \text{der} \quad x \in D \text{ (konvergensområdet)}$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\;\mathrm{d}x = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\omega x)\,\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(n\omega x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(n\omega x)\,\mathrm{d}x$$

der $\omega = 2\pi/T$ og $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ved å bruke $L = \frac{T}{2}$, kan vi forenkle integralene:

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\omega x)\,\mathrm{d}x$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(n\omega x)\,\mathrm{d}x$$

Dersom grafen til f er **symmetrisk om y-aksen (jamn funksjon)**, er $b_n = 0$ og

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\sin(\frac{2\pi n x}{T})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\cos(\frac{2\pi n x}{T})\,\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x$$

$$F_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi}{L}x)$$

Dersom grafen til f er **symmetrisk om origo (funksjon)**, er $a_0 = a_n = 0$ og

$$b_n = \frac{4}{T}\int_{0}^{T/2} f(x)\sin(\frac{2\pi n x}{T})\,\mathrm{d}x = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\,\mathrm{d}x,$$

$$F_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

Konvergensteorem for fourierrekker

Hvis en periodisk funksjon $f(x)$ med periode T og er stykkvis kontinuelig på intervallet $-T/2 \leq x \leq T/2$ og har venstrederivert og høyrederivert i hvert punkt i intervallet. Da gjelder:

a) fourierrekken til $f(x)$ er konvergent,
b) dens sum er lik $f(x_0)$ for alle $x = x_0$ bortsett fra i sprangene til $f(x)$.
c) I sprangene ($x = x_1$) er summen gjennomsnittet av høyre og venstre grenseverdi til $f(x)$, det vil si $(\frac{1}{2}[f(x_1^-) + (f(x_1^+)])$,

13.2 Kontrollspørsmål(refleksjon over definisjoner og teorier)

Oppgave 13.2.1: Kryss av foran rett svar (a, b, c eller d): En funksjon $y = f(x)$ kan ha fourierrekker dersom f er:

(a) Periodisk (b) Kontinuerlig
(c) Stykkevis konintuerlig (d) Periodisk og stykkevis kontinuerlig

Oppgave 13.2.2: En funksjon er "T-periodisk funksjon".

(a) Perioden er $T/2$. (b) f tilfredsstiller: $f(x+T) = -f(t)$
(c) f tilfredsstiller: $f(x+T) = f(t)$ (d) f tilfredsstiller: $f(x+2\pi) = f(t)$

Oppgave 13.2.3: Fourier-rekken for en T-periodisk jamn funksjon($\omega = \dfrac{2\pi}{T}$) kan skrives som:

(a) $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

(b) $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$

(d) $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$

Oppgave 13.2.4: Fourier-rekken for en T-periodisk odd funksjon($\omega = \dfrac{2\pi}{T}$) kan skrives som:

(a) $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$

(b) $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$

(d) $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$

Oppgave 13.2.5: Gitt den periodiske funksjonen $f(x) = \begin{cases} x+2 \text{ når } -2 < x \leq 0 \\ x-2 \text{ når } 0 < x \leq 2 \\ f(x+4) \end{cases}$

Hva konvergerer fourierekken mot i $x = 0$?

(a) $s(0) = \dfrac{1}{2}[f(0^-) + (f(0^+)] = 0$
(b) $s(0) = f(0)$
(c) $s(0) = f(0^+) = 0$ (d) Ikke definert.

Oppgave 13.2.6: Gitt den periodiske funksjonen $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\pi} & \text{når } -\pi < x \leq 0 \\ -\dfrac{x}{\pi} & \text{når } 0 < x \leq \pi \\ f(x+2\pi) \end{cases}$

Bestem middelverdien til funksjoner over et intervall med lengden like stor som perioden.

13.3 Kontrolloppgaver(fordypning av metoder og teorier)

Oppgave 13.3.1: Gitt den periodiske funksjonen

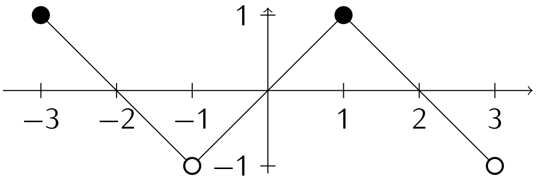
$$f(x) = x \text{ for } -2 \leq x < 2;$$
$$f(x+4) = f(x)$$

i) Lag en skisse av grafen til f i intervallet $-4 \leq x \leq 4$.
Angi perioden og regn ut $f(-22)$ og $f(22)$. Regn ut gjennomsnittsverdien til $f(x)$.

ii) Regn ut fourierkoeffisientene og vis at rekken blir

$$F_f(x) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \sin(n\pi x)$$

Oppgave 13.3.2: Her er det gitt grafen til periodisk funksjon.



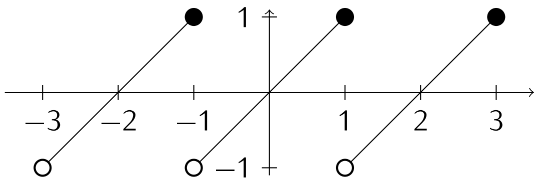
a) Sett opp funksjonsuttrykket (en oppdelt funksjon).
Angi peridoen og eventuelle symmetri egenskaper.

b) Regn ut funksjonensmiddelverdi over et intervall med periodens lengde. Hva konvergerer fourierrekken mot i $x = -1$ og $x = 1$?

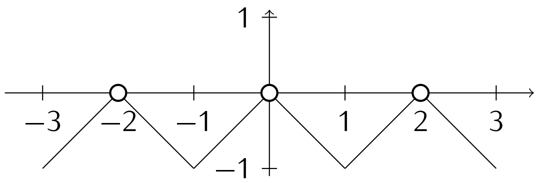
Oppgave 13.3.3: Her er det tegnet grafen til tre priodiske funksjoner.

a) Sett opp funksjonsuttrykket.
Angi peridoen og eventuelle symmetri egenskaper.

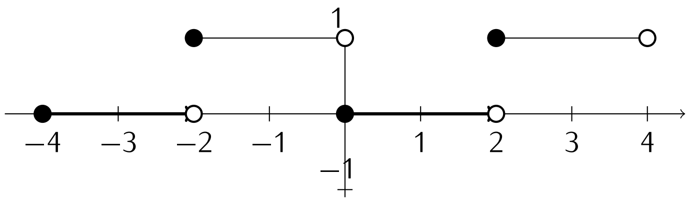
b) Sett opp fourierrekken. Hva konvergerer fourierrekken mot i $x = 0$?



(i)



(ii)



(iii)

Oppgave 13.3.4: Gitt den periodiske funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{når } -2 \leq x \leq 0 \\ x-1 & \text{når } 0 < x \leq 2 \end{cases}$$

og $f(x+4) = f(x)$.

a) Angi peridoen og eventuelle symmetri egenskaper.

b) Sett opp fourierrekken. Angi middelverdien til funksjonen over en periode. Hva konvergerer fourierrekken mot i $x = 0$?

Fasit

Oppgave 13.2.1:
(d) er korrekt.

Oppgave 13.2.2:
(b) er korrekt.

Oppgave 13.2.3:
(b) er korrekt.

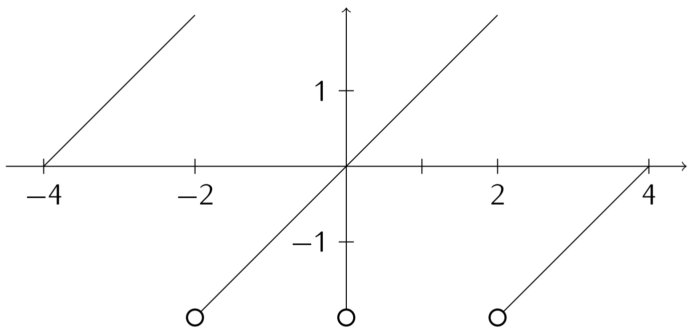
Oppgave 13.2.4:
(c) er korrekt.

Oppgave 13.2.5:
f er ikke kontinuerlig i $x = 0$. $f(0^-) = 2$ og $f(0^+) = -2$: (a) $s(0) = \frac{1}{2}[f(0^-) + (f(0^+)] = 0$

Oppgave 13.2.6:
Første ledd i fourierrekken er middelverdien $\overline{f(x)} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)dx = a_0$.

Her har vi en Jamn funksjon: $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{x}{\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2\pi}x^2\right]_0^\pi = 1$

Oppgave 13.3.1:
Løsningsforslag

i) 

Grafen viser at f er en *odde* funksjon; den er symmetrisk om origo.
$f(-22) = f(-22 + 6 \cdot 4) = f(2) = 0$ og $f(22) = f(22 - 5 \cdot 4) = f(2) = 0$. Gjennomsnittsverdien er første ledd i fourier-rekken og for en odde funksjon er dette lik 0.
Det betyr at alle koeffisientar a_0 og a_n er lik 0, og b_n-koeffisientane kan vi regne ut som

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\frac{n\pi}{l})\,\mathrm{d}x$$

der $T = 4$ er periodelengden og $l = \dfrac{T}{2} = 2$. Vi får altså koeffisientene

$$b_n = \int_0^2 x\sin(\frac{n\pi}{2}x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{4\sin(\frac{n\pi}{2}x)}{n^2\pi^2} - \frac{2x\cos(\frac{n\pi}{2}x)}{n\pi}\right]_0^2 = \left[0 - \left(\frac{4\cdot\cos(n\pi)}{n\pi} - 0\right)\right]$$
$$= \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}$$

Bemerk $\sin(n\pi) = 0$ når $n = 0, 1, 2, \ldots$ og Fourierrekken er dermed

$$F_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(\frac{n\pi x}{2})$$

Oppgave 13.3.2:
Løsningsforslag

(a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{når } -1 < x \le 1 \\ 2 - x & \text{når } 1 \le x < 3 \\ f(x+4) & \text{(Perioden er 4)} \end{cases}$

(b) Første ledd i fourierrekken er middelverdien $\overline{f(x)} = \dfrac{1}{T}\int\limits_0^T f(x)dx = \dfrac{a_0}{2}$.

$\dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2}(2\int_0^1 x\,\mathrm{d}x + 2\int_1^2(-x+2)\,\mathrm{d}x)) = \dfrac{1}{2}(\left[\dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \left[-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x\right]_1^2) = \dfrac{1}{2}$

Fourierrekken konvergerer mot 0: $F_f(1) = f(1) = 1$ (f er kontinuerlig i $x = 1$)

Funksjonen er ikke kontinuerlig i $x = -1$ og dermed:

$\dfrac{1}{2}(f(-1^-) + f(-1^+)) = \dfrac{1}{2}(-1 + (-1)) = -1$. Grenseverdiene i begge sider er like.

Oppgave 13.3.3:
Løsningsforslag

(i) (a) $f(x) = x$, $-1 < x \le 1$ og Perioden er 2: f(x+2) = f(x). Symmetri om origo.

(b) $F_f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n\sin(n\pi x) = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin(n\pi x)$

Fourierrekken konvergerer mot 0: $F_f(0) = f(0) = 0$ (f er kontinuerlig i $x = 0$)

I formelarket som du får til eksamen, står det at du kan regne slik selv om funksjonen er kontinuerlig: $\dfrac{1}{2}(f(0^-) + f(0^+)) = 0$.

(ii) (a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{når } -1 \le x < 0 \\ -x & \text{når } 0 < x \le 1 \end{cases}$ og Perioden er 2: f(x+2) = f(x). Symmetri om y-aksen(jamn funksjon: $b_n = 0$).

(b) $F_f(x) = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)\pi x)$.

$F_f(0) = \dfrac{1}{2}(f(0^-) + f(0^+)) = 0$ (f er ikke kontinuerlig i $x = 0$ (ikke definert i origo)).

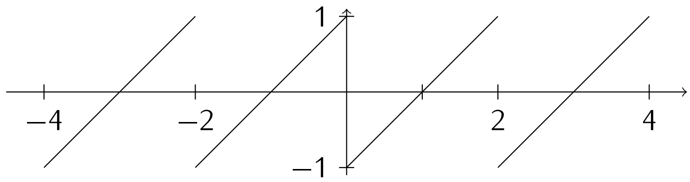
(iii) (a) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{når } -2 \leq x < 0 \\ 0 & \text{når } 0 \leq x < 2 \end{cases}$ og Perioden er 4: f(x+2) = f(x). Ingen symmetri egenskaper.

(b) $F_f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cos(\frac{(2n-1)\pi x}{2})$.

$F_f(0) = \frac{1}{2}(f(0^-) + f(0^+)) = \frac{1}{2}(1+0) = 0,5$ (f er ikke kontinuerlig i $x = 0$)

Oppgave 13.3.4:
Løsningsforslag

a) Perioden er 4: $f(x+4) = f(x)$.



Grafen kan hjelpe oss å angi symmetri egenskaper.
Symmetri om origo (odde)

b)

$$b_n = \int_0^2 (x-1)\sin(\frac{n\pi}{2}x)\,dx = \int_0^2 x\sin(\frac{n\pi}{2}x)\,dx - \int_0^2 \sin(\frac{n\pi}{2}x)\,dx$$
$$= \left[\frac{4}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{2}x) - \frac{2x}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}x)\right]_0^2 - \left[-\frac{2}{n\pi}\cos(\frac{n\pi}{2}x)\right]_0^2$$
$$= \left[0 - \left(\frac{4\cdot\cos(n\pi)}{n\pi} - 0\right)\right] - \left[-\frac{2\cos(n\pi x)}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\right]$$

der vi har brukt at $sin(n\pi) = 0$ når $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$b_n = -\frac{2}{n\pi}(1+\cos n\pi) = -\frac{2}{n\pi}(1+(-1)^n) = \frac{-2(2)}{(2n)\pi} = -\frac{2}{n\pi}$$

Bemerk $(1+(-1)^n$ er lik 0 hvis n er et odde tall og er lik 2 når n er et partall. Fourierrekken er dermed

$$F_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(\frac{2n\pi}{2}x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin(n\pi x)$$

Middelverdien til f over en periode er $\overline{f(x)} = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx = \frac{a_0}{2} = 0$.

$F_f(0) = \frac{1}{2}(f(0^-) + f(0^+)) = \frac{1}{2}(1+(-1)) = 0$ (f er ikke kontinuerlig i $x = 0$).