Kapittel 2

Komplekse tall

2.1 Kompleksetall-Oppsummering

Kvadratroten av -1 må være en løsning til ligningen $x^2 = -1$, om den finnes. Tallet i kalles *den imaginære enheten* og er det vi trenger for å definere de komplekse tallene.

Et Komplekst tall på kartesisk(standard), polar(eksponentialform) og trigonometrisk form

Den imaginære enheten, i, er definert som kvadratroten av -1, $i = \sqrt{-1}$. Et komplekst tall kan skrives på formen $z = a + ib$, der x er realdelen og iy er den imaginærdelen. Et komplekst tall kan presenteres på standard(kartersisk), eksponential(polar)og trigonometrisk form:

$$z = a + ib = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

der r og θ kalles modulus og argumentet til z henholdsvis.
Den konjugerte av et komplekst tall $z = a + ib$ er definert ved $\bar{z} = \overline{a + ib} = a - ib$. z og $\bar{z}$ er speilet om den reelle aksen.

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = r^2$$

Formler

Fra kartesisk(standard) til polar(eksponentialform)

$z = a + ib \longrightarrow z = re^{i\theta}$, der $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ og $\theta = \tan^{-1}(\dfrac{b}{a})$

Fra polar(eksponentialform) til kartesisk(standard):
$z = re^{i\theta} \longrightarrow z = a + ib$, der $a = r\cos\theta$ og $b = r\sin\theta$

Nyttig å huske

$$\begin{array}{ll}
i = \sqrt{-1} & e^{i\pi/2} = i \\
i^2 = i \cdot i = -1 & e^{i\pi} = -1 \\
i^3 = i \cdot i^2 = -i & i^3 = (e^{i\pi/2})^3 = e^{i3\pi/2} = -i \\
i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1 & i^4 = (e^{i\pi})^2 = e^{i2\pi} = 1 \\
\vdots & \vdots \\
i^{2n} = (i^2)^n = (-1)^n & i^{2n} = (e^{i\pi/2})^{(2n)} = e^{in\pi} = (-1)^n \\
i^{(2n+1)} = i \cdot i^{2n} = i\,(-1)^n & i^{(2n-1)} = (e^{i\pi/2})^{(2n-1)} = e^{i(2n-1)\pi/2} = i\,(-1)^n
\end{array}$$

Regneregler

Betrakt to komplekse tall: $z_1 = a_1 + ib_1$ and $z_2 = a_2 + ib_2$, så gjelder det:

$$
\begin{aligned}
z_1 \pm z_2 &= (a_1 + ib_1) \pm i(a_2 + ib_2) \\
&= (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1)i(a_2 + ib_2) \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{(a_1 + ib_1)}{(a_2 + ib_2)} = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} \\
&= \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}
\end{aligned}
$$

2.2 Kontrollspørsmål(refleksjon over definisjoner og teorier)

Oppgave 2.2.1:

a) Kan man si hvis et tall er et reelt tall($\mathbb{R}$), så er det også et komplekst tall. alle reelle tall er komplekse tall($\mathbb{C}$)?

b) Hvor ligger alle reelle tall i det komplekse planet?

c) Hvor ligger komplekse tall på formen $z = ai$, der a er et reelt tall, i det komplekse planet?

d) Kan vi si kvadratet til et rent imaginært tall på formen $z = ai$, der $a \neq 0$, er et reelt negativt tall?

Oppgave 2.2.2:

a) Den imaginære delen til $z = a + ib$ er b eller ib?

b) Hva er den reelle og imaginære delen til $z = i(a + ib)$?

c) Hva er den reelle og imaginære delen til $z = \frac{a}{i}$?

Oppgave 2.2.3:

a) Forklar hvorfor det å gang et komplekstall z med i (imaginærehnet) er det samme som å vri det tallet med 90^o mot urretning.

b) Forklar hvorfor det å dele et komplekstall z med i (imaginærehnet) er det samme som å vri det tallet med 90^o i urretning.

Oppgave 2.2.4:

a) Skriv i^2, i^3 og i^4 på standardform(kartesisk form)

b) Skriv $\sqrt{i}$ og $\sqrt[3]{i}$ på standardform(kartesisk form).

2.3 Kontrolloppgaver(fordypning av metoder og teorier)

Oppgave 2.3.1: Løs ligningene:

a) $x^2 + 9 = 0$

b) $z^2 - 4z + 5 = 0$

Oppgave 2.3.2: Regn ut og skriv svarene på standardform(kartesisk form):

a) $(1+2i)\cdot(4-5i)$

b) $(3+4i)^{-1}$

c) $(2+2i)^{8}$

d) $(-1-\sqrt{3}i)^{6}$

Oppgave 2.3.3: Regn ut og skriv svarene på standardform(kartesisk form):

a) $(2+3i)\cdot(1-2i)$

b) $\dfrac{2+i}{i}$

c) $\dfrac{2+i}{1-2i}$

d) $(2+i)^{-1}$

e) $(-2+2i)^{8}$

f) $(-2-2i)^{4}$

Oppgave 2.3.4: Gitt $z_1 = 2-2i$, $z_2 = -1+i$.

a) Regn ut $z_1 \cdot \overline{z}_1$, $z_1 z_2$ og $\dfrac{z_1}{z_2}$.

b) Regn ut : z_1^8.

Oppgave 2.3.5: Gitt $z = e^{i\alpha}$, der $0 \leq \alpha \leq \pi$

a) Tegn inn z i et kompleksplan.

b) Hvis at det å multipliser z med i kan bety å vri z med $\dfrac{\pi}{2}$ mot urretningen.

Oppgave 2.3.6: Skriv tallet $\frac{2+i}{-1+2i}$ på både kartesisk form og polar form. Beregn $\left(\frac{2+i}{-1+2i}\right)^{1051}$.

Oppgave 2.3.7: Løs de komplekse likningene.

a) $z-2i = 2iz+1$

b) $z^2-4z+13=0$

Oppgave 2.3.8: Regn ut w og marker dem som punkter i det komplekse planet.

a) $w^2 = 12-12\sqrt{3}\,i$.

b) $w^3 = -8$.

Fasit

Oppgave 2.2.1:

a) Ja

b) På reelle aksen.

c) På den imaginære aksen.

d) ja: $z^2 = (ai)^2 = a^2 i^2 = -a^2$

Oppgave 2.2.2:

a) $Im(z) = b$

b) $Re(z) = -b$ og $Im(z) = a$

c) $z = \frac{a}{i}\frac{a(-i)}{i(-1)} = -ai$ og dermed$Re(z) = 0$ og $Im(z) = -a$

Oppgave 2.2.3:

a) $z \cdot i = e^{i\theta} e^{\frac{i\pi}{2}} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$

b) $z = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{\frac{i\pi}{2}}} = e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}$

Oppgave 2.2.4:

a) -1, $-i$ og 1

b) $\sqrt{i} = (e^{i\pi/2})^{1/2} = e^{i\pi/4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i(\dfrac{\sqrt{2}}{2})$, $\sqrt[3]{i} = (e^{i\pi/2})^{1/3} = e^{i\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + i(\dfrac{1}{2})$

Oppgave 2.3.1:

a) $z = \pm 3$

b) $z = 2 \pm i$

Oppgave 2.3.2:

a) $(1 + 2i) \cdot (4 - 5i) = 14 + 3i$

b) $(3 + 4i)^{-1} = \dfrac{1}{3 + 4i}$
$= \dfrac{3 - 4i}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \dfrac{3}{25} - \dfrac{4}{25}i$

c)
$(2 + 2i)^8 = (2\sqrt{2}e^{i\pi/4})^8 = 2^{12}e^{i2\pi} = 4096$

d) $(-1 - \sqrt{3}i)^6 = 2e^{i4\pi/3})^6 = 2^6 e^{i8\pi} = 64$

Oppgave 2.3.3:

a) $8 - i$

b) $1 - 2i$

c) i

d) $\frac{2}{5} - i15$

e) 4096

f) -64

Oppgave 2.3.4:

a) $z_1 \cdot \bar{z}_1 = (2-2i)(2+2i) = 2^2 + (-2)^2 = 8.$ Bemerk $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.
$z_1 z_2 = (2-2i)(-1+i) = 4i$
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2-2i}{-1+i} = \frac{(2-2i)(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = -2$

b) $z_1^8 = (2\sqrt{2}e^{i-\pi/4})^8 = 2^{12}e^{-i2\pi}$
$= 4096.$

Oppgave 2.3.5:

a) z kan presenteres med en halvsirkel med radien 1 et kompleksplan.

b) Hvis at det å multipliser z med i kan bety å vri z med $\frac{\pi}{2}$ mot urretningen.
$z \cdot i = e^{i\alpha} \cdot e^{i\pi/2} = e^{i(\alpha+\pi/2)}$

Oppgave 2.3.6:

$-i = e^{-i\pi/2}$
$(-i)^{1051} = (e^{-i\pi/2})^{1051} = e^{-524\pi}e^{-i3\pi/2} = i$

Oppgave 2.3.7:

a) $-3/5 + i4/5$

Løsningsforslag

$z - 2i = 2iz + 1$ Likningen er løst, men vi må forenkle svaret (til kartesisk form).

$$z(1-2i) = 1 + 2ii$$

$$z = \frac{1+2i}{1-2i}$$

$$z = \frac{1+2i}{1-2i} = \frac{(1+2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{1+2i+2i+4i^2}{1^2+2^2} = \underline{\underline{-3/5+4/5i}}$$

b) $z = 2 \pm 3i$

Løsningsforslag

$$z^2 - 4z + 13 = 0$$

$$z = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13}}{2 \cdot 1}$$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{-36}}{2}$$

$$z = \frac{4 \pm 6i}{2}$$

$$\underline{\underline{z = 2 \pm 3i}}$$

Oppgave 2.3.8:

a) $\pm(3\sqrt{2} - \sqrt{6}\,i)$

b) $2e^{i\,\pi/3} = 1 + i\sqrt{3}$
$2e^{i\,\pi} = -2$
$2e^{i\,5\pi/3} = 1 - i\sqrt{3}$