8.10 Affine transformasjoner (Kap. 9.5 læreboken)

En affin transformasjon (fra latin, *affinis*, "tilknyttet"), også kalt affin avbildning eller affin funksjon, er en sammensetning av en lineær transformasjon og en translasjon. Geometrisk utgjør de affine transformasjonene alle operasjoner som opprettholder rette linjer.

Lineære transformasjoner

La V og W være to vektorrom, og la T være en funksjon mellom de to vektorrommene:

$$T : V \to W$$

Funksjonen T er en lineær transformasjon hvis det gjelder følgende:

$$\begin{aligned} &1) \quad T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \\ &2) \quad T(av_1) = aT(v_1) \end{aligned}$$

der v_1 og v_2 er <u>vektorer</u> i vektorrommet V og a er en konstant.
Det kan vises at hvis T er en lineær transformasjon, så er $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Eksempel 8.18
Gitt a)

$T(v) = \begin{bmatrix} x+3y \\ 5x-2 \end{bmatrix}$ b) $T(v) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ xy \end{bmatrix}$ c) $T(v) = \begin{bmatrix} 3x - y \\ x + 2y \end{bmatrix}$

der $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Undersøk om lineærtransformasjonen T er lineær.

a) $T(\mathbf{0}) = T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ dermed er T ikke-lineær.

Bemerk: $T(v) = \begin{bmatrix} x+3y \\ 5x-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

Gitt $T(v) = \begin{bmatrix} x+3y \\ 5x-2 \end{bmatrix}$ der $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

b) Undersøk om lineærtransformasjonen T er lineær.

$T(\mathbf{0}) = T(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ OK

Enklest å sjekke egenskap nr. 2: $T(\mathrm{c}\, v_1) = cT(v_1)$

$$T(\mathrm{c}\, v_1) = T(\mathrm{c}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}) = T(\begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} c^2 x_1{}^2 + c^2 y_1{}^2 \\ (cx_1)(\mathrm{c}\, y_1) \end{bmatrix} = c^2 \begin{bmatrix} x_1{}^2 + y_1{}^2 \\ x_1 y_1 \end{bmatrix} \neq cT(v_1) = c\begin{bmatrix} x_1{}^2 + y_1{}^2 \\ x_1 y_1 \end{bmatrix}$$

Obs: Den svikter på egenskap 1 også.

$$T(v_1+v_2)=T(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix})=T(\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\\(x_1+x_2)(y_1+y_2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}x_1^{\,2}+y_1^{\,2}\\x_1y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2^{\,2}+y_2^{\,2}\\x_2y_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2(x_1y_1+x_2y_2)\\x_1y_2+x_2y_1\end{bmatrix}$$

Og $T(v_1)+T(v_1)=\begin{bmatrix}x_1^{\,2}+y_1^{\,2}\\x_1y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2^{\,2}+y_2^{\,2}\\x_2y_2\end{bmatrix}$ og dermed $T(v_1+v_2)\neq T(v_1)+T(v_2)$

dermed er T ikke-lineær.

c) $T(v)=\begin{bmatrix}3x-y\\x+2y\end{bmatrix}$

He sjekke egenskap 1 er ok. Men sjekke 2 samtidig:

Her kan vi sjekke 1først

1)

$$T(v_1+v_2)=T(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix})=T(\begin{bmatrix}x_1+x_2\\y_1+y_2\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}3(x_1+x_2)-(y_1+y_2)\\(x_1+x_2+2(y_1+y_2)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3x_1-y_1\\x_1+2y_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3x_2-y_2\\x_2+2y_2\end{bmatrix}=T(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix})+T(\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix})=T(v_1)+T(v_2)$$

2) Her kan vi sjekke engenskap nr.2

$$T(\mathrm{c}\,v_1)=T(\mathrm{c}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix})=T(\begin{bmatrix}cx_1\\cy_1\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}3(\mathrm{c}\,x_1)-(\mathrm{c}\,y_1)\\\mathrm{c}\,x_1+2(\mathrm{c}\,y_1)\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}3x_1-y_1\\x_1+2y_1\end{bmatrix}=cT(v_1)$$

Og **dermed Lineær.**

Alternativ: På tavla kombinerte jeg 1 og 2 og viste at

$$T(\alpha v_1+\beta v_2)=T(\alpha\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix})=T(\begin{bmatrix}\alpha x_1+\beta x_2\\\alpha y_1+\beta y_2\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}3(\alpha x_1+\beta x_2)-(\alpha y_1+\beta y_2)\\(\alpha x_1+\beta x_2)+2(\alpha y_1+\beta y_2)\end{bmatrix}$$

$$=\alpha\begin{bmatrix}3x_1-y_1\\x_1+2y_1\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}3x_2-y_2\\x_2+2y_2\end{bmatrix}=\alpha T(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix})+\beta T(\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix})=\alpha T(v_1)+\beta T(v_2)$$

Eks.

Eksempel 8.19

La $\mathbf{A}$ være en $m\times n$ matrise og definer funksjonen: $T: R^n \to R^m$; $T(\mathbf{x})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}$

Vis at er T en lineær transformasjon.

Løsn.

$$T(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2)=\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_1+\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_2=T(\mathbf{x}_1)+T(\mathbf{x}_2)$$

$$T(a\mathbf{x}_1)=\mathbf{A}\cdot(a\mathbf{x}_1)=a\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}_1=aT(\mathbf{x}_1)$$

Eksempel 8.20 La T betegne en lineærtransformasjon slik at:

$$T : R^3 \to R^3 \quad ; \quad \begin{bmatrix} x+y \\ 2z-y \\ x-z \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Sett opp matrisen A.

$$\begin{bmatrix} x+y \\ 2z-y \\ x-z \end{bmatrix} = \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \to \mathbf{A} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}}}$$