8.2 Differensligninger

En differensligning av orden d er lineær med konstante koeffisienter dersom den er på formen

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \cdots + a_d y_{n-d} = f(n),$$

der høyre side er en funksjon av n (det vil si at f gir mening uten å tenke på følgen $\{y_n\}$).

En lineær differensligning med konstante koeffisienter er i tillegg homogen dersom høyre side f er lik null.

En differensligning av orden d trenger d startverdier for å bli entydig bestemt, vi må altså vite hva $y_0, y_1, \cdots, y_{d-1}$ er for å få en tallfølge til svar.

Helt sentralt i løsningsmetoden for homogene lineære differensligninger står den karakteristiske ligningen.

La

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \cdots + a_d y_{n-d} = 0$$

være en homogen lineær differensligning. Da kalles ligningen

$$a_0 \lambda^d + a_1 \lambda^{d-1} + \cdots + a_{d-1}\lambda + a_d = 0$$

den karakteristiske ligningen til differensligningen.
Den karakteristiske ligningen svarer på hvilke grunntall λ som gir løsninger til differensligningen på formen $y_n = \lambda^n$.

Den geometriske følgen $y_n = \lambda^n$ ($\lambda \neq 0$) er en løsning til en homogen lineær differensligning med konstante koeffisienter hvis og bare hvis λ er en rot i den karakteristiske ligningen.
Vi sjekker om $y_n = \lambda^n$ er en løsning til differensligningen

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + \cdots + a_d y_{n-d} = 0$$

ved innsetting. Blir venstre og høyre side like? Vi får

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_d \lambda^{n-d} = 0.$$

Multipliserer vi med λ^{d-n} på begge sider av likhetstegnet, får vi den karakteristiske ligningen

$$a_0 \lambda^d + a_1 \lambda^{d-1} + \cdots + a_{d-1}\lambda + a_d = 0.$$

Når λ er en rot i den karakteristiske ligningen blir venstre og høyre side i differensligningen like, og i så fall er $y_n = \lambda^n$ en løsning til differensligningen. Når λ ikke er løsning til den karakteristiske ligningen, så er ikke $y_n = \lambda^n$ noen løsning.

1.og 2. orden

Løsningsmetoden nevnt her kan benyttes for første og andre orden differensligning med konstante koeffisienter:

$$a y_n + b y_{n-1} = f(n)$$

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} = f(n)$$

Her tar vi for oss en lineær differensligning av 2. orden:

$$a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} = f(n)$$

Hvis $f(n) = 0$, kalles differensligningen homogen ellers differensligningene er inhomogen.
Den generelle løsningen er lik summen til den generelle løsningen til den homogene differensiligningen og den spesielle(partikulære) løsningen som er løsning til den inhomogene ligningen:

$$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)}$$

Homogen $a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} = 0$

Ved å anta $y = e^{rx}$ er en løsning, kan man sette opp den karakteristiske ligningen:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

$$y_n^{(h)} = \begin{cases} A\lambda_1^n + B\lambda_2^n & \lambda_1 \neq \lambda_2 \text{ (reelle)} \\ \lambda^n(A + Bn) & \lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \text{(reelle)} \\ \rho^n(A\cos n\theta + B\sin n\theta) & \lambda = \alpha \pm i\beta = \rho e^{i\theta} \\ \text{der } \ \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \ \text{ og } \ \theta = \tan^{-1}(\dfrac{\beta}{\alpha}) & \end{cases}$$

Inhomogen $a_0 y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} = f(n)$

For å finne den den partikulære løsningen, kan du gjette en spesiell løsning x^p og finne konstantene ved innsetting (ubestemte koeffisienters metode).

$f(n)$	$y_n^{(p)}$
c	M
$an + b$	$Mn + N$
$an^2 + bn + c$	$Mn^2 + Nn + P$
$a_r n^r + \ldots + a_1 n + a_0$	$M_r n^r + \ldots + M_1 n + M_0$
ak^n	Mk^n
$(an + b)k^n$	$(Mn + N)k^n$
$(a_r n^r + \ldots + a_1 n + a_0)k^n$	$(M_r n^r + \ldots + M_1 n + M_0)k^n$
$a\cos n\phi$	$M\cos n\phi + N\sin n\phi$
$a\sin n\phi$	$M\cos n\phi + N\sin n\phi$
$ak^n\cos n\phi$	$(M\cos n\phi + N\sin n\phi)\,k^n$
$ak^n\sin n\phi$	$(M\cos n\phi + N\sin n\phi)\,k^n$

Dobbel og trippel løsning

Dersom $y_n^{(p)}$ er en del av $y_n^{(h)}$, ganger vi den med n^r.

$f(n)$	$y_n^{(p)}$
$3y_{n+1} - y_n = 5 \cdot 2^n$	$y_n^{(p)} = An2^n$
$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = 3^n$	$y_n^{(p)} = An3^n$
$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 3^n$	$y_n^{(p)} = An^2 3^n$

8.2 Differensligninger

Oppgave 8.0.1: Gitt $a_{n+1} = 2a_n + 3n - 1$, $a_0 = 1$.

a) Regn ut a_1, a_2 og a_3. Angi type av differensligningen.

b) Vis at $a_n = 2^n - 3n - 2$ er en løsning til differensligningen. Gi den generelle løsningen til differensligningen.

Oppgave 8.0.2: Angi for hver differensligning hvilke betingelser i definisjon 8.2.2 den tilfredsstiller.

a) $y_n + 3\cos y_{n-4} = 0$

b) $n \cdot y_{n+1} + y_{n-1} = 2$

c) $y_{n+1} + 4y_n - 2y_{n-1} = 0$

d) $y_n + 2y_{n-1} - 5y_{n-2} = \sin n$

e) $(y_{n+1})^2 + y_{n-1} = 1$

Oppgave 8.0.3: Løs differensligningene

a) $a_{n+1} = 3a_n$, $a_0 = 2$

b) $a_{n+1} = 3a_n + 4n$, $a_0 = 1$

c) $a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1} + 5 \cdot 2^n$

d) $a_{n+1} = 4a_n - 4a_{n-1} + 2 \cdot 3^n$

e) $a_{n+1} = 2a_n - 4a_{n-1} - \dfrac{7}{3} \cdot 3^n$

f) $a_{n+1} = 2a_n - 2a_{n-1} + 5n$

g) $a_{n+2} + a_n = 6$

Oppgave 8.0.4:

a) Løs differensligningen: $y_n - 3y_{n-1} + 2y_{n-2} = 0$, Gitt $y_0 = 1$ og $y_1 = 4$.

b) Løs differensligningen: $y_n - 3y_{n-1} + 2y_{n-2} = -5$, Gitt $y_0 = 1$, $y_1 = 4$.

c) Løs differensligningen: $y_n - 6y_{n-1} = 10 + 2 \cdot 6^n$.

d) Løs differensligningen:
$y_n - 8y_{n-1} + 16y_{n-2} = 0$, $n \geq 2$, Gitt startverdier $y_0 = 3$, $y_1 = 32$.

Fasit

Oppgave 8.0.1:

a) $a_1 = 1$, $a_2 = 4$ og $a_3 = 13$. 1. orden lineær inhomogen.

b) Ved å innsette $a_n = 2^n - 3n - 2$ kan vi kontrollere at dette er en løsning. $a_n = C \cdot 2^n - 3n - 2$ (på grunn av linearitet). (Bemerk at 2^n er løsningen til den homogene løsningen og denne ganges med C.

Oppgave 8.0.2:

a) orden 4, ulineær

b) orden 2, lineær, inhomogen, ikke konstante koeffisienter

c) orden 2, lineær, homogen, konstante koeffisienter

d) orden 2, lineær, inhomogen, konstante koeffisienter

e) orden 2, ulineær

Oppgave 8.0.3:

a) $a_n = 2 \cdot 3^n$.

b) $a_n = 2 \cdot 3^n - 2n - 1$

c) $a_n = C_1 + C_2 3^n - 10 \cdot 2^n$

d) $a_n = 2^n (C_1 \cos(\frac{n\pi}{3}) + C_2 \sin(\frac{n\pi}{3}) - 3^n$

e)

f) $a_n = 2^n (C_1 \cos(\frac{n\pi}{3}) + C_2 \sin(\frac{n\pi}{3}) - 3^n$

g) $a_n = (C_1 \cos \frac{n\pi}{2} + C_2 \sin \frac{n\pi}{2}) + 3$

Oppgave 8.0.4:

a) $y_n = -2 + 3 \cdot 2^n$

b) $y_n = 3 - 2 \cdot 2^n + 5n$. Bermerk at $a_n = An$ ($a_n = A$ er en dobbelløsning og dermed må ganges med n)

c) Den homogene delen $y_n^{(h)}$ finnes fra den karakteristiske ligningen; $\lambda - 6 = 0$ gir at $y_n^{(h)} = A \cdot 6^n$. For den partikulære gjetter vi først på $K + L \cdot 6^n$, men siden eksponentialdelen allerede er dekket av den homogene delen må vi velge $y_n^{(p)} = K + L \cdot n \cdot 6^n$. Innsatt i ligningen finner vi $K = -2$, $L = 2$. Det endelige svaret blir altså

$$y_n = y_n^{(h)} + y_n^{(p)} = A \cdot 6^n - 2 + 2n \cdot 6^n.$$

Bermerk at $a_n = An$ ($a_n = A$ er en dobbelløsning og dermed må ganges med n)

d) Den karakteristiske ligningen er $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = 0$, som bare har løsningen $\lambda = 4$. Da er løsningen på formen $y_n = A \cdot 4^n + B \cdot n \cdot 4^n$. Fra startverdiene beregnes A og B, og vi finner

$$y_n = 3 \cdot 4^n + 5n \cdot 4^n.$$