Kapittel 9

Lineær algebra-Oppsummering

Matriser

1. Matriser er et rektangulært sett av elementer ordnet i rekker og kolonner:
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

2. Kvadratisk matrise: $A_{n\times n} = [a_{ij}]_{n\times n}$

3. Diagonalmatrise
$$D_{n\times n} = \begin{cases} a_{ij} = 0 & i \neq j \\ a_{ij} \neq 0 & i = j \end{cases}$$

4. Enhetsmatrise:
$$I_{n\times n} = \begin{cases} a_{ij} = 0 & i \neq j \\ a_{ij} = 1 & i = j \end{cases}$$

5. Produktet AB av to matriser er bare definert når antall kolonner i A er lik antall rader i B. Hvis A er en $m \times n$-matrise og B en $n \times k$-matrise, vil matriseproduktet $C = AB$ bli en $m \times k$-matrise. Elementet c_{ij} på plass (i, j) i C er «skalarproduktet» av rad i i A og kolonne j i B:
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

6. Multiplikasjon(dimensjon til den multipliserte): $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = C_{m\times p}$

7. Regneregler:
La A, B og C være matriser og s og t tall. Videre lar vi 0 være en nullmatrise og I en identitetsmatrise. Følgende regneregler gjelder så lenge matrisene har størrelser som gjør at uttrykkene kan regnes ut:

   a) $A + B = B + A$
   b) $(A + B) + C = A + (B + C)$
   c) $A + 0 = A$
   d) $s(A + B) = sA + sB$

e) $(s+t)A = sA + tA$

f) $s(tA) = (st)A$

g) $(A^T)^T = A$

h) $(A+B)^T = A^T + B^T$

i) $(sA)^T = sA^T$

j) $(AB)^T = B^T A^T$

k) $A(BC) = (AB)C$

l) $A(B+C) = AB + AC$

m) $(A+B)C = AC + BC$

n) $s(AB) = (sA)B = A(sB)$

o) $IA = A = AI$

8. Det finnes tre typer rekkeoperasjoner
   1. Å bytte om to rader i matrisen
   2. Å multiplisere en rad med en konstant $c \neq 0$
   3. Å summere en rad med et multiplum av en annen rad

9. La A være en vilkårlig $m \times n$-matrise. La E være elementærmatrisen som er resultatet av å utføre en bestemt radoperasjon på I_m (identitetsmatrisen av størrelsen $m \times m$). Resultatet av å utføre den samme radoperasjonen på A er da lik produktet EA.

Determinanter

10. Determinanter:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$

11. Volumet til parallellepipedet utspent av de tre vektorene $\vec{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\vec{v} = [v_1, v_2, v_3]$ og $\vec{w} = [w_1, w_2, w_3]$ er lik absoluttverdien av determinanten

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Determinanten er lik null dersom vektorene ligger i samme plan.

12. Determinanten til en triangulærmatrise er produktet av elementene langs diagonalen. Ved bruk av radoperasjoner endrer determinanten seg kontrollert etter følgende mønster:

Nr.	Operasjon	Effekt på determinanten
1	$R_i \leftrightarrow R_j$	bytter fortegn
2	cR_i	multipliseres med c
3	$R_i + kR_j$	uendret

13. Hvis et tall ganges med en matrise, skal alle elementene i matrisen ganges med dette tallet. Hvis et tall ganges med en determinant, skal bare elementene i en rad eller en kolonne ganges med tallet.

Inversematrisen

14. Inversmatrisen: En kvadratisk matrise A er inverterbar dersom det finnes en matrise A^{-1} slik at: $AA^{-1} = A^{-1}A = I$

15. Man kan bestemme inversmatrisen til A ved hjelp av Gauss eliminasjon eller kofaktor metoden:
$A^{-1} = \frac{C^T}{det(A)}$.
A^{-1} eksisterer dersom $det(A) \neq 0$.

Lineære ligningssystemer

16. Et *lineært ligningssystem* med m ligninger og n ukjente har formen

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

Tallene a_{ij} kalles *koeffisientene*, og tallene b_i kalles *konstantleddene*. Ligningssystemet er *homogent* hvis alle konstantleddene er null. I motsatt fall er ligningssystemet *inhomogent*. Ligningssystemet kan skrives på matrise form

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

17. I Lineære ligningssystemer opptrer ofte med like mange ligninger som ukjente, og systemet kalles da kvadratisk. Et slikt ligningssystem kan skrives som: $AX = b$, der A er koeffisientmatrisen, $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ er ukjent matrisen og b er konstant matrisen. Łøsningsmetoder: Det er flere metoder for å løse ligningssystemet kan blant annet Gauss eliminasjon og metoden med inversmatrisen: $X = A^{-1}b$.

18. Et system med flere ligninger enn ukjente sies å være overbestemt, mens et underbestemt system har færre ligninger enn ukjente.

19. Ligningssystemet $AX = b$, har en entydig løsning(bestemt) dersom $det(A) \neq 0$. Ellers systemet kan ha uendelig mange løsninger(ubestemt) eller ingen løsning.

20. Et lineært *homogent* ligningssystem, $AX = \mathbf{0}$, har bare trivielle løsninger($X = \mathbf{0}$) når $det(A) \neq 0$ og har uendelig mange løsninger dersom $det(A) = 0$

21. La A være en kvadratisk matrise. Følgende påstander er ekvivalente:
    a) Ligningssystemer $A\vec{x} = \vec{b}$ med A som koeffisientmatrise, har nøyaktig en løsning.
    b) Kolonnene i A er lineært uavhengige vektorer.

c) Ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har nøyaktig en løsning.

d) Matrisen A er radekvivalent til identitetsmatrisen I.

e) Matrisen A er invertibel.

f) $\det A \neq 0$

22. Gauss-eliminasjon: Den første og mest arbeidskrevende delen er å føre matrisen over på trappeform. Den andre delen er å gå fra trappeform til redusert trappeform. Noen ganger brukes navnet Gauss-eliminasjon bare om første del og Gauss-Jordan-eliminasjon om den fulle algoritmen.

    I algoritmen gjør vi radoperasjoner på en matrise. Underveis vil matrisen ha denne formen:

$$\left(\begin{array}{c|c} \text{trappeform} & \text{matrise} \\ \text{(bra)} & \text{(la stå)} \\ \hline \text{nullmatrise} & \text{matrise} \\ \text{(bare nuller)} & \text{(jobb med denne blokken)} \end{array}\right)$$

    Blokken «trappeform» øverst til venstre skal vokse og etter hvert fylle hele matrisen. For å oppnå dette jobber vi med blokken nederst til høyre. I denne blokken må vi

    1) bytte om på rader slik at den øverste raden får det ledende elementet så langt til venstre som mulig

    2) deretter multiplisere øverste rad med et tall c for at det ledende elementet skal bli 1

    3) til sist bruke den ledende 1-eren i øverste rad til å nulle ut elementene i radene under

    Slik vokser blokken «trappeform», og vi gjentar stegene ovenfor til hele matrisen har trappeform.

    Når hele matrisen har fått trappeform, gjelder det å eliminere elementene over de ledende 1-erne for å komme til redusert trappeform. Det enkleste er da å begynne med den ledende 1-eren nederst til høyre i matrisen og jobbe seg oppover og bakover til alle elementer over alle ledende 1-ere er blitt null.

23. Tilbakesubstitusjon: Når vi løser et ligningssystem, kan vi som et alternativ til å gjøre Gauss-eliminasjon frem til redusert trappeform, stoppe når vi har kommet til trappeform. Deretter setter vi opp ligningene som svarer til denne trappeformen. Hver ligning kan vi tenke oss som et uttrykk for en av variablene som en funksjon av de andre. Løsningen til systemet finner vi ved å begynne nedenfra og sette inn for de kjente variablene. Dette kalles *tilbakesubstitusjon*.

Lineær uavhengighet

24. Vektorene $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ kalles *lineært uavhengige* dersom matrisen $A = (\vec{v}_1 \mid \cdots \mid \vec{v}_n)$ har trappeform med en ledende 1-er i hver kolonne.

25. Vektorene $v_1, v_2, \cdots, v_n$ er lineært uavhengige dersom ligningssystemet:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$$

    har bare trivielle løsninger:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

26. En *parametrisert linje* angis av en retningsvektor $\vec{r}$ og et punkt P_0 på linja. Denne linja består av alle punkter P som oppfyller

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{r}, \qquad \text{for } t \in \mathbb{R}.$$

Et *parametrisert plan* utspent av to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ gjennom et punkt P_0 består av alle punkter P som oppfyller

$$\overrightarrow{P_0P} = s\vec{u} + t\vec{v}, \qquad \text{for } s, t \in \mathbb{R}.$$

Vektorrom (MAT107)

27. La V være en mengde der elementene kalt vektorer og en tilh o rende mengde av skalarer, definert med to operasjoner vektoraddisjon og skalarmultiplikasjon. Dersom samtlige av punktene under er oppfylt, så er V et vektorrom:
1) $0 \in V$ 2) $v_1 + v_2 \in V$ 3) $kv_1 \in V$.

Basis og skifte av basis (utenfor pensum)

28. En mengde av lineært uavhengige vektorer i et vektorrom er en algebraisk basis eller en Hamelbasis for vektorrommet, dersom en vilkårlig vektor i rommet kan uttrykkes som en lineærkombinasjon av disse.

29. Anta at et vektorrom V har en basis $B = \{b_1, b_2, b_3, \cdots\}$ Anta at $S = \{s_1, s_2, s_3, \cdots\}$ også kan være basis til V. Det finnes da en unik inverterbar matrise, $M_{S\to B}$, slik at alle $v \in V$:

$$[V]_B = M_{S\to B}[V]_S$$

$$[V]_S = M_{B\to S}[V]_B$$

Lineær transformasjon(MAT107)

30. En funksjon T fra et vektorrom V til et vektorrom W ($T : V \to W$) er en *lineær transformasjon* dersom

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v}), \quad \text{og} \\ &\text{b)} \quad T(c\vec{u}) = cT(\vec{u}), \end{aligned}$$

for alle vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i V og alle skalarer c.

31. En $m \times n$-matrise A definerer en lineær transformasjon T fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ ved matrisemultiplikasjon, $T(\vec{u}) = A\vec{u}$. Omvendt finnes det for hver lineære transformasjon T fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ en $m \times n$-matrise A slik at $T(\vec{u}) = A\vec{u}$. Kolonne nummer k i matrisen A er lik $T(\vec{e}_k)$.

Kontrolloppaver - Lineær algebra

Oppsummering fra MAT100 (9.01 og 9.02)

Oppgave 9.0.1: Et inhomogent lineært likningssystem er gitt ved:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + \alpha x_3 = 6 \end{cases}$$

Skriv ligningssystemet på formen: $A\mathbf{x} = b$, der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

a) Regn ut $|A|$. Bruk Gauss eliminasjon til å bestemme for hvilke verdier av α har systemet en bestemt løsning (en entydig løsning).

b) Regn ut løsningen for $\alpha = 2$.

Oppgave 9.0.2:

a) Bestem k slik at følgende vektorer blir lineært uavhengige: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Et inhomogent lineært likningssystem er gitt ved:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 5x_2 + kx_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

c) Bestem for hvilke verdier av k systemet har et entydig løsning.

Kontrollspørsmål(refleksjon over definisjoner og teorier)

Oppgave 9.0.3:

a) Hvis $T(v)$ er lineær, hvilke krav skal T tilfredsstille?

b) Hvis $T(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha T(v_1) + \beta T(v_2)$, der α og β er reelle tall, kan vi T er en lineær transformasjon?

c) Hvis $T(\vec{0}) = \vec{0}$, kan vi konkludere at T er lineær? Hvis ikke, ta et eksempel.

Kontrolloppgaver(fordypning av metoder og teorier)

Oppgave 9.0.4: Undersøk om transformen $T(v) = Av$, der $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, er lineær for:

a) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c)

Oppgave 9.0.5: .

a) La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Undersøk om transformen $T(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{b}$, der $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, er lineær.

b) La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ Undersøk om transformen $T(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{b}$(skalar produkt), der $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, er lineær.

Oppgave 9.0.6: Finn standardmatrisen A i transformasjonene under:

a) La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definert ved at $T(\vec{v})$ er projeksjonen av $\vec{v}$ på y-aksen.

b) La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definert ved at $T(\vec{v})$ er refleksjonen av $\vec{v}$ omkring linja $y = x$.

c) La $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. definert ved at $T(\vec{v})$ er refleksjonen av $\vec{v}$ omkring xz-planet.

d) La $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. definert ved at $T(\vec{v})$ er en samensatt transformaskjon, først refleksjonen av $\vec{v}$ omkring linja $y = x$ og deretter projeksjonen av $\vec{v}$ på y-aksen

Oppgave 9.0.7: La $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ være en basis $\mathbf{p}$ og $\mathbf{q}$. Vi definerer en lineær transformasjon $T(\mathbf{u}) = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$, der $\mathbf{u} = x\mathbf{p} + y\mathbf{q}$

a) Regn ut $T(\mathbf{p})$, $T(\mathbf{q})$ og $T(2\mathbf{p} - \mathbf{q})$.

b) Forklar at transformasjonsmatrisen i basis p og q blir $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 9.0.8:

a) Hva er en lineær transformasjon?

b) La $U = \{q(x) = ax^2 + bx + c, a; b; c \in R\}$ være vektorrommet av alle polynom av andre grad. Vis at avbildningen $T(q(x)) = q'(x)$ er en lineærtransformasjon.

c) Undersøk om avbildningene $T(q(x)) = \int q(x)\,\mathrm{d}x$ og $T(q(x)) = \sqrt{q(x)}$ er også lineære?

Kapittel 10

Lineær algebra (egenverdi, egenvektor) Oppsummering

Egenverdiproblemet(MAT107)

1. La A være en kvadratisk matrise (altså $n \times n$). En vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ kalles en *egenvektor* for A dersom $\vec{v} \neq \vec{0}$ og $A\vec{v}$ er parallell med $\vec{v}$:

   $$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{for et tall } \lambda$$

   Tallet λ kalles *egenverdien* for A tilhørende $\vec{v}$.

2. Egenvektorer og egenverdier forekommer alltid sammen. Merk også at om $\vec{v}$ er en egenvektor, vil hele linja gjennom vektoren også bestå av egenvektorer (unntatt $\vec{0}$, som vi ikke kaller en egenvektor) med samme egenverdi. Det er en konsekvens av linearitet.
   Grunnen til at $\vec{0}$ ikke regnes som en egenvektor, er at

   $$A \cdot \vec{0} = \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$$

   uansett hvilken matrise A og hvilket tall λ vi velger.

3. La A være en $n \times n$-matrise. Egenverdiene til A er løsningene til ligningen

   $$\det\big(A - \lambda I\big) = 0.$$

   For hver løsning λ_i til denne ligningen finnes de tilhørende egenvektorene som løsninger til ligningssystemet

   $$(A - \lambda_i I) \cdot \vec{v} = \vec{0}.$$

4. Ligningen

   $$\det\big(A - \lambda I\big) = 0$$

   kaller vi *den karakteristiske ligningen* til matrisen A. Uttrykket $\det(A - \lambda I)$, som er et polynom i λ, kaller vi *det karakteristiske polynomet*.

5. Dersom A er en reell matrise og λ_1 er kompleks egenverdi med tilhørende kompleks egenvektor $\vec{v}_1$, gir konjugasjon en ny egenverdi $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ med tilhørende egenvektor $\vec{v}_2 = \overline{\vec{v}_1}$.

6. *Egenrommet* til matrisen A tilhørende egenverdien λ_i er mengden av alle vektorer $\vec{v}$ som oppfyller $A\vec{v} = \lambda_i\vec{v}$.

7. La A være en $n \times n$-matrise. Egenverdiene til A er løsningene til ligningen

$$\det\big(A - \lambda I\big) = 0.$$

For hver løsning λ_i til denne ligningen finnes de tilhørende egenvektorene som løsninger til ligningssystemet

$$(A - \lambda_i I) \cdot \vec{v} = \vec{0}.$$

8. La A være en $n \times n$-matrise, og la $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ være de forskjellige reelle egenverdiene. Hver egenverdi λ_i har en multiplisitet m_i, som er definert som det største tallet slik at $(\lambda - \lambda_i)^{m_i}$ er en faktor i det karakteristiske polynomet $\det(A - \lambda I)$. Da har vi:

   a) Antallet frie variabler i ligningssystemet $(A - \lambda_i I) \cdot \vec{v} = \vec{0}$ tilhørende en egenverdi λ_i er minst 1 og maksimalt m_i.

   b) Egenvektorer med ulik egenverdi er lineært uavhengige av hverandre.

   c) Hvis antallet frie variabler i a er lik m_i for hver egenverdi λ_i, har matrisen n lineært uavhengige egenvektorer.

Markov kjeder og andre dynamiske systemer

9. En *Markov-kjede* er en følge av tilstandsvektorer

$$\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k, \ldots$$

sammen med en overgangsmatrise A slik at

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k \quad \text{for } k = 0, 1, \ldots$$

Det kreves at tilstandsvektorene i Markov-kjeden har ikke-negative koordinater med sum 1, og at matrisen A har ikke-negative elementer slik at hver kolonnesum er 1. En *likevektsvektor* $\vec{v}$ for A er en egenvektor med egenverdi 1.

10. Hvis A har n forskjellige egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, følger det automatisk at de tilhørende egenvektorene $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ er lineært uavhengige, fordi egenvektorer tilhørende forskjellige egenverdier alltid er lineært uavhengige (se teorem 10.1.13).

11. La A være en stokastisk matrise, det vil si at elementene er ikke-negative og kolonnesummene er lik 1. Da er $\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$ en Markov-kjede, og følgende gjelder:

   - Minst én av egenverdiene er 1.
   - Alle egenverdiene oppfyller ulikheten $|\lambda_i| \leq 1$.

12. En ligning på formen $\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$ kalles et *diskret lineært dynamisk system* med overgangsmatrise A.

13. La $\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$ være et dynamisk system med en $n \times n$-overgangsmatrise A. Hvis A har n lineært uavhengige egenvektorer $\vec{v}_1$, ..., $\vec{v}_n$, er den generelle løsningen

$$\vec{x}_k = C_1\lambda_1^k\vec{v}_1 + \cdots + C_n\lambda_n^k\vec{v}_n,$$

der hver C_i er en vilkårlig konstant, og hver λ_i er egenverdien tilhørende egenvektoren $\vec{v}_i$.

14. La A være en stokastisk matrise, det vil si at elementene er ikke-negative og kolonnesummene er lik 1. Da er $\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$ en Markov-kjede, og følgende gjelder:

    - Minst én av egenverdiene er 1.
    - Alle egenverdiene oppfyller ulikheten $|\lambda_i| \leq 1$.

15. Hvis A er en reell 2×2-matrise uten reelle egenverdier, men med komplekse egenverdier λ og $\overline{\lambda}$ og tilhørende komplekse egenvektorer $\vec{v}$ og $\overline{\vec{v}}$, er den generelle løsningen til det dynamiske systemet $\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$ på formen

$$\vec{x}_k = E\,\mathrm{Re}(\lambda^k \vec{v}) + F\,\mathrm{Im}(\lambda^k \vec{v})$$

    for reelle konstanter E og F.

Diagonalisering(MAT107)

16. La P være matrisen med de valgte egenvektorene som kolonner:

$$P = \left(\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \cdots | \vec{v}_n\right)$$

    Da er P inverterbar, og

$$A = PDP^{-1},$$

    der D er diagonalmatrisen

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

    Elementene langs diagonalen er egenverdiene λ_i, som svarer til egenvektorene $\vec{v}_i$.

17. En $n \times n$-matrise A kalles *diagonaliserbar* dersom den kan skrives på formen

$$A = PDP^{-1}$$

    for en diagonal matrise D og en inverterbar matrise P.

18. Hvis $A = PDP^{-1}$ er en diagonalisert matrise, er potensene gitt ved

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

19. La $A = A^T$ være en symmetrisk $n \times n$-matrise. Da gjelder:

    a) Alle egenverdiene til A er reelle tall.
    b) Matrisen A har n lineært uavhengige vektorer, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$.
    c) Egenvektorer med ulik egenverdi står vinkelrett på hverandre.
    d) Valget av egenvektorer kan modifiseres slik at vi får nye egenvektorer $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$, der hver vektor $\vec{u}_i$ har lengden 1, og hvert par av vektorer står vinkelrett på hverandre.
    e) Med dette valget av egenvektorer vil matrisen $P = (\vec{u}_1 | \cdots | \vec{u}_n)$ være ortogonal, altså ha egenskapen

$$P^{-1} = P^T.$$

f) Diagonaliseringen har dermed formen

$$A = PDP^T.$$

20. En $n \times n$-matrise A kalles *ortogonalt diagonaliserbar* dersom den kan skrives på formen

$$A = PDP^T$$

for en diagonal matrise D og en ortogonal matrise P.

Underrom av $\mathbb{R}^n$

21. Et *underrom* av $\mathbb{R}^n$ er en mengde av vektorer $H \subseteq \mathbb{R}^n$ med disse egenskapene:

   Nullvektoren $\vec{0}$ ligger i H.

   Hvis $\vec{u}$ og $\vec{v}$ begge ligger i H, ligger også summen $\vec{u} + \vec{v}$ i H.

   Hvis $\vec{u}$ ligger i H og k er et tall, ligger også produktet $k\vec{u}$ i H.

22. La $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$. *Spennet* til vektorene $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ er det minste underrommet av $\mathbb{R}^n$ som inneholder alle disse vektorene. Vi skriver

$$\text{Spenn}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}.$$

23. En mengde vektorer $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ kalles *lineært uavhengig* dersom ligningen

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

bare har den trivielle løsningen $(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (0, 0, \ldots, 0)$. En mengde vektorer $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ kalles *lineært avhengig* dersom det finnes tall $a_1, a_2, \ldots, a_k$, der ikke alle er lik null, slik at

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_k\vec{v}_k = \vec{0}.$$

24. Definisjonen av lineær avhengighet er bare en reformulering av definisjon 9.4.11. For å løse ligningen

$$x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \cdots + x_k\vec{v}_k = \vec{0}$$

kan vi bruke Gauss-eliminasjon på matrisen

$$\left(\vec{v}_1 | \vec{v}_2 | \cdots | \vec{v}_k\right)$$

med vektorene $\vec{v}_i$ som kolonner. Hvis vi da får ledende enere i alle kolonner, finnes bare den trivielle løsningen, og vektorene er lineært uavhengige. Får vi derimot frie variabler, finnes ikke-trivielle løsninger, og vektorene er lineært avhengige.

25. En *basis* for et underrom H er en mengde lineært uavhengige vektorer $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}$ som utspenner H, dvs.

$$H = \text{Spenn}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k\}.$$

26. La H være et underrom av $\mathbb{R}^n$. Da gjelder:

   a) Det finnes basiser for H.

   b) Alle basiser for H består av det samme antallet vektorer.

c) En basis for rommet $\mathbb{R}^n$ består av n vektorer.

d) Antallet vektorer i en basis for H er mindre enn eller lik n.

27. emphDimensjonen til et underrom H av $\mathbb{R}^n$ er antall vektorer i en basis for H. Dimensjonen til H skrives $\dim H$.

28. *Kolonnerommet* til en matrise
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
er underrommet $\mathrm{Kol}(A)$ av $\mathbb{R}^m$ utspent av kolonnevektorene fra A. Vi har
$$\mathrm{Kol}(A) = \mathrm{Spenn}\left\{ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right\}.$$

29. Rangen til en matrise A er lik dimensjonen av kolonnerommet:
$$\mathrm{rang}(A) = \dim \mathrm{Kol}(A)$$

30. *Radrommet* til en matrise
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$
er underrommet $\mathrm{Rad}(A)$ av $\mathbb{R}^m$ utspent av radvektorene fra A. Vi har
$$\mathrm{Rad}(A) = \mathrm{Spenn}\left\{(a_{11},\ a_{1,2},\ \cdots,\ a_{1n}), (a_{21},\ a_{22},\ \cdots, a_{2n}), \cdots, (a_{m1},\ a_{m2},\ \cdots, a_{mn})\right\}.$$

31. Rangen til en matrise A er lik dimensjonen av radrommet:
$$\mathrm{rang}(A) = \dim \mathrm{Rad}(A)$$

Skifte av basis

32. For en lineær transformasjon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ og en basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^n$ er *matrisen N til T i basisen* $\mathcal{B}$ definert ved
$$[T(\vec{x})]_{\mathcal{B}} = N[\vec{x}]_{\mathcal{B}}, \quad \text{der } \vec{x} \text{ er vilkårlig.}$$
Som notasjon for denne matrisen bruker vi $N = [T]_{\mathcal{B}}$. item Hvis $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$, og T er en transformasjon på $\mathbb{R}^n$, da er
$$[T]_{\mathcal{B}} = ([T(\vec{v}_1)]_{\mathcal{B}} \mid \cdots \mid [T(\vec{v}_n)]_{\mathcal{B}}).$$

33. For to basiser $\mathcal{B}$ og $\mathcal{C}$ for $\mathbb{R}^n$ er *koordinatskiftematrisen P til $\mathcal{C}$ fra $\mathcal{B}$* definert ved
$$[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}}, \quad \text{der } \vec{x} \text{ er vilkårlig.}$$
Som notasjon for denne matrisen bruker vi $P = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{M}$.

34. Koordinatskiftematrisen til standardbasisen fra en annen basis $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ for $\mathbb{R}^n$ har formen
$$\underset{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}{M} = (\,\vec{v}_1 \,|\, \vec{v}_2 \,|\, \cdots \,|\, \vec{v}_n\,).$$

35. La $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ og $\mathcal{D}$ være tre basiser for $\mathbb{R}^n$. Da gjelder
$$\underset{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{C}}{M}\,\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{M} = \underset{\mathcal{D}\leftarrow\mathcal{B}}{M}.$$

36. Dersom vi har gitt to basiser $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n\}$ og $\mathcal{C} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n\}$ for $\mathbb{R}^n$, er
$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{M} = \underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{S}}{M}\,\underset{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}{M} = \left(\underset{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{C}}{M}\right)^{-1}\underset{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}{M} = (\vec{u}_1 \,|\, \vec{u}_2 \,|\, \cdots \,|\, \vec{u}_n)^{-1}(\vec{v}_1 \,|\, \vec{v}_2 \,|\, \cdots \,|\, \vec{v}_n).$$

Lineær transformasjon

37. La A være en $n \times n$-matrise som definerer en lineær transformasjon T på $\mathbb{R}^n$ ved multiplikasjon, $T(\vec{x}) = A\vec{x}$. La videre $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$. Matrisen til T i basisen $\mathcal{B}$ står i relasjon til A via koordinatskiftematrisene:
$$A = \underset{\mathcal{S}\leftarrow\mathcal{B}}{M}\,[T]_{\mathcal{B}}\,\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}}{M}$$

subsection*Basisskifte for transformasjonene $T\colon\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

38. La A være en $m \times n$-matrise som definerer en lineær transformasjon T fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$ ved multiplikasjonen $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ for $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. La videre $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ være en basis for $\mathbb{R}^n$ og $\mathcal{C} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$ være en basis for $\mathbb{R}^m$. Matrisen til T til basisen $\mathcal{C}$ fra basisen $\mathcal{B}$ står i relasjon til A via koordinatskifter:
$$A = \underset{\mathcal{S}_m\leftarrow\mathcal{C}}{M}\,\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{[T]}\,\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{S}_n}{M}$$

Here er $\mathcal{S}_n$ og $\mathcal{S}_m$ standardbasisene til henholdsvis $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{R}^m$. ι

Kontrolloppaver - Lineær algebra II

Oppgave 10.0.9:

a) Gjør rede for egenverdi og egnevektor.

b) Kan $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ kan skrives som $(A - \lambda)\vec{v} = \vec{0}$? Hvis ikke, hva er det den rette måten å omskrive ligningen på?

Oppgave 10.0.10:

a) Hvilke matriser kan ha egenverdi og egenvektor?

b) Kan egenvektor være nullvektor?

c) Vis at karakteristiske ligningen til matrisen $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ kan skrives som $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$. Hva kan vi si om : $\lambda_1 + \lambda_2$ og $\lambda_1\lambda_2$?

Oppgave 10.0.11: Gitt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Løs egenverdiproblemet og diagonaliser $\mathbf{A}$. Finn en formel for A^n ved hjelp av diagonaliseringen(Du behøver ikke å gange matrisene sammen).

Oppgave 10.0.12: Gitt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Løs egenverdiproblemet og diagonaliser $\mathbf{A}$. Finn en formel for A^n ved hjelp av diagonaliseringen(Du behøver ikke å gange matrisene sammen).

Oppgave 10.0.13:

a) Vis at $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ er ikke diagonaliserbar.

b) Gitt matrisen: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Vis at A er symmetrisk.

Bestem egenverdi og egenvektorene. Vis at egenvektorene er ortogonale. Diagonliaser A.

Oppgave 10.0.14: La A være en 2×2 reell matrise gitt ved $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$, der α er et reelt tall og $\alpha \neq 0$ For hvilke verdier av α er A diagonaliserbar (som en reell matrise)? Begrunn svaret.

Oppgave 10.0.15: La B være matrisen

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Regn ut egenverdiene og egenvektorene til B.
Finn en matrise P og en diagonalmatrise D slik at $P^{-1}BP = D$. Finn B^5.

Fasit

Oppgave 9.0.1:

a) $|A| = -\alpha + 7$, $\alpha \neq 7$

b) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 1.$

Oppgave 9.0.2:

a) Lineært uavhengige når $|\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3| = 5 - 5k \neq 0$, $k \neq 1$

c) $k \neq 1$

Oppgave 9.0.3:

a) $T : V \to W$, der V og W er to vektorrom, er en lineær transformasjon dersom:
i) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ og
ii) $T(kv_1) = kT(v_1)$ der v_1 og $v_2 \in V$.

b) Ja

c) Nei, de andre 2 kravene må også tilfredsstilles. Eksempel $T(v) = Av$, der $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ med $A = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$. $T(\vec{0}) = \vec{0}$, men ikke lineær.

Oppgave 9.0.4:

a) Ja

b) Nei

Oppgave 9.0.5:

a) Nei $T(0) \neq 0$.

b) Nei

Oppgave 9.0.6:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Oppgave 9.0.7:

$T(x\mathbf{p} + y\mathbf{q}) = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$, Regn ut $T(\mathbf{p}) = \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $(x = 1, y = 0)$, $T(\mathbf{q}) = \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(x = 0, y = 1)$ og $T(2\mathbf{p} - \mathbf{q}) = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $(x = 2, y = -1)$

Oppgave 9.0.8:

a) $T : V \to W$, der V og W er to vektorrom, er en lineær transformasjon dersom:
i) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$ og
ii) $T(kv_1) = kT(v_1)$ der v_1 og $v_2 \in V$.

b) i) $T(q_1(x) + q_2(x)) = (q_1(x) + q_2(x))' = q_1'(x) + q_2'(x) = T(q_1(x)) + T(q_2(x))$
ii) $T(kq_1(x)) = (kq_1(x))' = kq_1'(x) = kT(q_1(x))$. dermed det er bevist.

c) i) $T(q_1(x) + q_2(x)) = \int (q_1(x) + q_2(x)\,\mathrm{d}x = \int q_1(x)\,\mathrm{d}x + \int q_2(x)\,\mathrm{d}x = T(q_1(x)) + T(q_2(x))$
ii) $T(kq_1(x)) = \int (kq_1(x))\,\mathrm{d}x = k\int q_1(x)\,\mathrm{d}x = kT(q_1(x))$. Lineær transformasjon.

i) $T(q_1(x) + q_2(x)) = \sqrt{q_1(x) + q_2(x)} \neq \sqrt{q_1(x)} + \sqrt{q_2(x)}$. IKKE lineær transformasjon.

Oppgave 10.0.9:

a) A være en kvadratisk matrise (altså $n \times n$). En vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ kalles en *egenvektor* for A dersom $\vec{v} \neq \vec{0}$ og $A\vec{v}$ er parallell med $\vec{v}$:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v} \quad \text{for et tall } \lambda$$

Tallet λ kalles *egenverdien* for A tilhørende $\vec{v}$.

b) Nei. Rett notasjon: $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$, der I er identitetsmatrien.

Oppgave 10.0.10:

a) Kvadratiske matriser.

b) Nei

c) $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ og $\lambda_1\lambda_2 = ad - bc$

Oppgave 10.0.11:

Egenverdiene er -3 og 2 og tilhørende egenvektorene er $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Diagonalisering: $A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$.

$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-3)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1}$.

Oppgave 10.0.12:

Egenverdiene er 2 og -1 og tilhørende egenvektorene er $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Diagonalisering: $A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

$A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Oppgave 10.0.13:

a) Matrisen to sammenfallende egenverdier($\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) og gir kun en egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og dermed ikke diagonaliserbar.

b) $A^T = A$ og dermed symmetrisk. Egenverdiene er 1 og 3 og tilhørende egenvektorene er ortogonale: $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2^T = 0$.

Oppgave 10.0.14:
$\det A = (1-\lambda)(\alpha-\lambda)$. For $\alpha = 1$, ikke diagonaliserbar, da man ikke finner 2 lineær uavhengige egenvektorer. se oppgave 2. For $\alpha \neq 1$ er diagonaliser bar. Sjekk for $\alpha = 0$ og vi ser at systemet har 2 lineær uavhengige egenvektorer og dermed diagonaliserbar.

Oppgave 10.0.15:
Egenverdi 2 med egenvektor $[-1\ 2]^T$ og egenverdi 5 med egenvektor $[1\ 1]^T$.
$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $D^5 = \begin{bmatrix} 2^5 & 0 \\ 0 & 5^5 \end{bmatrix}$.
$B^5 = PD^5P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 3125 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2094 & 1031 \\ 2062 & 1063 \end{bmatrix}$.