Oppgave 1

a) $\lambda_1 = -3$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ og $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Man kan sjekke:
$\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ (summen av egenverdiene er lik summen til elementene på hoveddiagonalen: $-3 + 2 = 1 + (-2)$ OK!)

$\lambda_1 = 2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Sjekk: $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$: 2+3 = 1 +4 OK!

$\lambda_1 = -5$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ eller $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Sjekk: $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$: $-5 + (-2) = -4 + (-3)$ OK!

b) **i)** **(I)** Løsning: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t}$

Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og dermed systemet har likevekt i $(x, y) = (0, 0)$ (Ustabilt : en av egenverdiene er positiv)

(II) Løsning: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$

Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og dermed systemet har likevekt i $(x, y) = (0, 0)$ (ustabilt : begge egenverdiene er positive)

(III) Løsning: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t} + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t}$

Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og
dermed systemet har likevekt i $(x, y) = (0, 0)$. (Asymtotisk stabilt: begge egenverdiene er negative)

ii) **(I)** Retningsderivert: (retningsderivert kan tegnes som en liten vektor $[-3, 2]$ ut fra punktet $(1, -1)$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(II) Retningsderivert: (retningsderivert kan tegnes som en liten vektor $[3, -3]$ ut fra punktet $(1, -1)$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

(III) Retningsderivert: (retningsderivert kan tegnes som en liten vektor $[-5, 5]$ ut fra punktet $(1, -1)$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2

(I) a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + C_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t}$

Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og
dermed systemet har likevekt i $(x, y) = (0, 0)$.
Ustabilt (knutepunkt-ut)
b) Retningsderivert: (retningsderivert kan tegnes som
en vektor $[2, 5]$ ut fra punktet $(-1, 2)$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(II) a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-6t}$

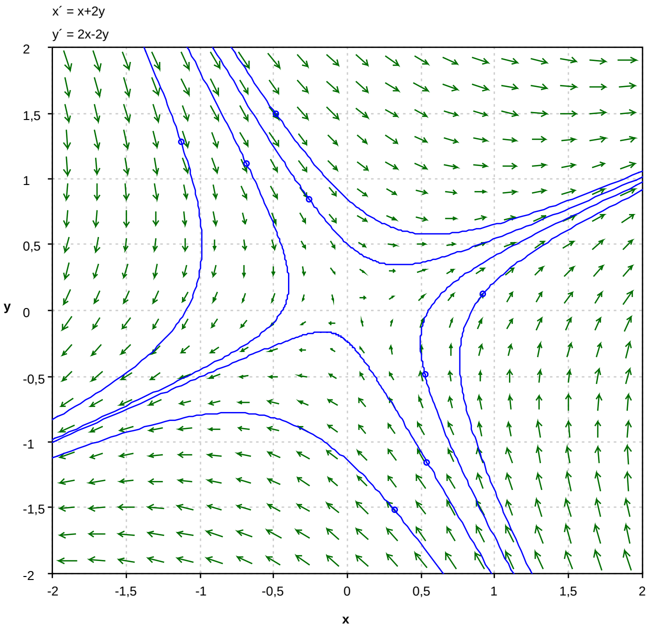
Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og
dermed systemet har likevekt i $(x, y) = (0, 0)$.
Asymptotisk stabilt (knutepunkt-inn)
b) Retningsderivert: (retningsderivert kan tegnes som
en liten vektor $[7, -8]$ ut fra punktet $(-1, 2)$.

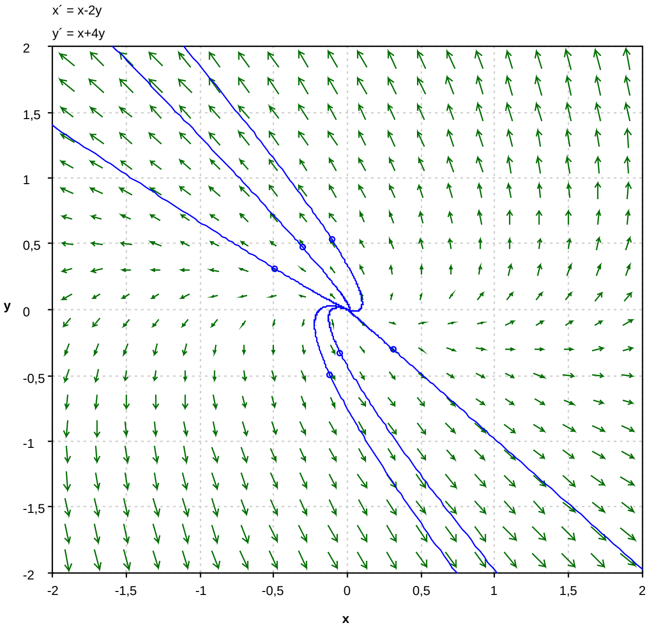
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -8 \end{bmatrix}$$

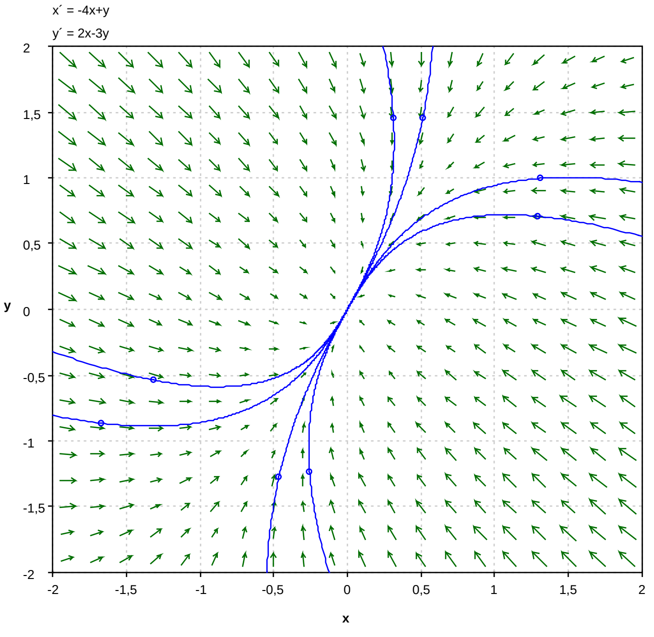
(III) a) $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + C_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t}$

Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og
dermed systemet har likevekt i $(x, y) = (0, 0)$.
Ustabilt (knutepunkt-ut)
b) Retningsderivert: (retningsderivert kan tegnes som
en liten vektor retning til $[3, 1]$ ut fra punktet $(-1, 2)$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$


x´ = x+2y
y´ = 2x-2y
2
1,5
1
0,5
y
0
-0,5
-1
-1,5
-2
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
x


x´ = x-2y
y´ = x+4y
2
1,5
1
0,5
y
0
-0,5
-1
-1,5
-2
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
x


x´ = -4x+y
y´ = 2x-3y
2
1,5
1
0,5
y
0
-0,5
-1
-1,5
-2
-2
-1,5
-1
-0,5
0
0,5
1
1,5
2
x

Oppsummering- Differensialligningssystemer

1. Et 2×2 lineært homogent system av differensialligninger kan skrives som:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

2. Egenverdiproblemet for $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

   1) Den karakteristiske ligningen for systemet gir to egenverdier: $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$
   Bemerk: $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ og $\lambda_1 \lambda_2 = ad - bc$
   2) Egenvektorene bestemmes ved: $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$.
   Bemerk: Hvis egenverdiene er like, finner man den andre egenvektoren ved $(A - \lambda I)\mathbf{v_2} = \mathbf{v_1}$.

3. Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og for dette systemet er origo $(x, y) = (0, 0)$

4. Anta tilhørende egenvektorer kan være $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$. Løsningen kan skrives om:

$$y = \begin{cases} C_1 \mathbf{v_1} e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{v_1} e^{\lambda_1 t} & \lambda_1 \neq \lambda_1 \text{ (reelle)} \\ e^{\lambda_1 t}(\mathbf{v_1}(C_1 + C_2 t) + C_2 \mathbf{v_2}) & \lambda_1 = \lambda_2 \text{ (reelle)} \end{cases}$$

   For komplekse egenverdier, $\lambda = \alpha \pm i\beta$, som gir egenvektorene
   $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi \pm i\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \end{bmatrix} = \mathbf{p} \pm i\mathbf{q}$
   kan løsningen skrives på formen (ikke vektlagt i pensum):

$$\begin{aligned} y = \quad & C_1 e^{\alpha t}(\mathbf{p} \cos \beta t - \mathbf{q} \sin \beta t) + \\ & C_2 e^{\alpha t}(\mathbf{p} \cos \beta t + \mathbf{q} \sin \beta t) \end{aligned}$$

5. Karakterisering av likevektpunktet

Egenverdi	Likevektspunktet
$\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 > 0$	Ustabilt (knutepunkt-ut)
$\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 < 0$	Ustabilt (sadelpunkt)
$\lambda_1 < 0$ og $\lambda_2 < 0$	Asymptotisk stabilt (knutepunkt-in)
$\lambda = \alpha \pm i\beta$	$\alpha > 0$ Ustabilt (Spiral ut- kilde)
	$\alpha < 0$ Asymptotisk stabilt (Spiral inn- sluk)
	$\alpha = 0$ stabilt (senter)

6. Den generelle løsningen til det lineære inhomogene differensialligningssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + u \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + v \end{cases}$$

der u og v er konsranter, kan skrives på formen $\mathbf{x} = \mathbf{x_h} + \mathbf{x_p}$, der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

$\mathbf{x_h}$ er løsningen til den homogene differensialligningssystemet.
$\mathbf{x_p}$ er løsningen til :

$$\begin{cases} x' = ax + by + u \\ y' = cx + dy + v \end{cases}$$