Oppgave 1

En kvadratisk matrise $A_{n\times n}$ kan diagonaliseres bare og bare hvis den har n lineært uavhengige egenvektorer. Hvis A er *diagonaliserbar*, og $A = MDM^{-1}$, så er kolonnene til M egenvektorene til A og D er diagonalmatrisen med de tilhørende egenverdiene på diagonalen.

a) Gitt $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ og $C = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

Løs egenverdiproblemet og diagonaliser matrisene.

b) Gitt differensialligningssystemer:

(I) $\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= 2x - 2y \end{aligned}$ (II) $\begin{aligned} x' &= x - 2y \\ y' &= x + 4y \end{aligned}$ (III) $\begin{aligned} x' &= -4x - 2y \\ y' &= 2x - 3y \end{aligned}$

i) Løs disse og tegn faseplan. Bestem likevektspunktet og karaktereriser likevektspunket (asymptotisk stabilt eller ustabilt)

ii) Bestem regningsderiverte i punktet $(1, -1)$ og tegn inn retningen til løsningskurven i dette punktet i faseplanet.

Oppgave 2

(a) Gitt differensialligningssystemer:

(I) $\begin{aligned} x' &= 2x + 2y \\ y' &= x + 3y \end{aligned}$ (II) $\begin{aligned} x' &= -5x + y \\ y' &= 4x - 2y \end{aligned}$ (III) $\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= 3x + 2y \end{aligned}$

a) Løs differensialligningssystemer. Bestem likevektspunktet og karaktereriser likevektspunket (asymptotisk stabilt eller ustabilt)

b) Bestem regningsderiverte i punktet $(-1, 2)$.

Oppsummering- Differensialligningssystemer

1. Et 2×2 lineært homogent system av differensialligninger kan skrives som:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$$

2. Egenverdiproblemet for $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

   1) Den karakteristiske ligningen for systemet gir to egenverdier: $\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$
   Bemerk: $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ og $\lambda_1\lambda_2 = ad - bc$
   2) Egenvektorene bestemmes ved: $(A - \lambda I)\mathbf{x} = 0$.
   Bemerk: Hvis egenverdiene er like, finner man den andre egenvektoren ved $(A - \lambda I)\mathbf{v_2} = \mathbf{v_1}$.

3. Likevektspunktet er der $x' = y' = 0$ og for dette systemet er origo $(x, y) = (0, 0)$

4. Anta tilhørende egenvektorer kan være $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$. Løsningen kan skrives om:

$$y = \begin{cases} C_1\mathbf{v_1}e^{\lambda_1 t} + C_2\mathbf{v_1}e^{\lambda_1 t} & \lambda_1 \neq \lambda_1 \text{ (reelle)} \\ e^{\lambda_1 t}(\mathbf{v_1}(C_1 + C_2 t) + C_2\mathbf{v_2}) & \lambda_1 = \lambda_2 \text{ (reelle)} \end{cases}$$

   For komplekse egenverdier, $\lambda = \alpha \pm i\beta$, som gir egenvektorene
   $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi \pm i\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi \end{bmatrix} \pm i \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \end{bmatrix} = \mathbf{p} \pm i\mathbf{q}$
   kan løsningen skrives på formen (ikke vektlagt i pensum):

$$\begin{aligned} y = \; & C_1 e^{\alpha t}(\mathbf{p}\cos\beta t - \mathbf{q}\sin\beta t) + \\ & C_2 e^{\alpha t}(\mathbf{p}\cos\beta t + \mathbf{q}\sin\beta t) \end{aligned}$$

5. Karakterisering av likevektpunktet

Egenverdi	Likevektspunktet
$\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 > 0$	Ustabilt (knutepunkt-ut)
$\lambda_1 > 0$ og $\lambda_2 < 0$	Ustabilt (sadelpunkt)
$\lambda_1 < 0$ og $\lambda_2 < 0$	Asymptotisk stabilt (knutepunkt-in)
$\lambda = \alpha \pm i\beta$	$\alpha > 0$ Ustabilt (Spiral ut- kilde)
	$\alpha < 0$ Asymptotisk stabilt (Spiral inn- sluk)
	$\alpha = 0$ stabilt (senter)

6. Den generelle løsningen til det lineære inhomogene differensialligningssystemet

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + u \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + v \end{cases}$$

der u og v er konsranter, kan skrives på formen $\mathbf{x} = \mathbf{x_h} + \mathbf{x_p}$, der $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

$\mathbf{x_h}$ er løsningen til den homogene differensialligningssystemet.
$\mathbf{x_p}$ er løsningen til :

$$\begin{cases} x' = ax + by + u \\ y' = cx + dy + v \end{cases}$$