Lineære differensialligningssystemer på formen $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$

Betrakt følgende system av lineære homogene differensialligninger av 1. orden med konstante koeffisienter:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \qquad \text{eller} \qquad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \text{eller} \qquad \frac{d}{dt}\mathbf{X} = \mathbf{AX}$$

11.2.1 Løsningsmetoden

Dersom vi kan finne en konstant λ og en tilhørende vektor $\mathbf{V}$ slik at systemets respons på denne vektoren forplanter seg i vektorens retning, kan vi skrive: $\mathbf{AV} = \lambda\mathbf{V}$ eller $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{V} = 0$.

En ikke-triviell løsning av dette ligningssystemet krever at determinanten til koeffisientmatrisen må settes lik null for å få ikke trivielle løsninger[1]: $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$.

Denne ligningen kalles systemets *karakteristiske ligning* og løsningen gir egenverdiene til lineære tids-invariante systemet. Egenverdiene har avgjørende betydning for systemets tidsrespons. De identifiserer systemets oppførsel, derav navnet karakteristisk ligning.

Diagonalisering

En tilstandsrommodell gir ikke en éntydig beskrivelse av et tidsinvariant system, det fins mange sett med differensialligninger som kan beskrive samme system. Et sett med lineære differensial ligninger kan transformeres til et annet sett av lineære differensialligninger. En slik lineær transformasjon som er spesielt nyttig, er den som transformerer systemet til et diagonalt system, som betyr at systemmatrisen blir en diagonal matrise (se kap. 3.1)

1) Først bestemmer vi egenverdiene:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \qquad \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0\,.$$

Det kan vises at løsningene er $\lambda = \dfrac{a + d \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ der $\Delta = (a + d)^2 - 4(ad - bc)$

og dermed: $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ og $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = ad - bc$.

Sjekk alltid før du regner egenvektorene: $\lambda_1 + \lambda_2 = spor(A)$, det vil si summen av egenvektorene er lik summen til elementene på hoved diagonalen.

2) Deretter regner vi egenvektorene $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{V} = 0$.

3) Løsningene til differensialligningen kan klassifiseres slik:

---

[1] Et homogent lineært ligningssystem $\mathbf{BX} = \mathbf{0}$ har ikke trivielle løsninger ($\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$) når $\det(\mathbf{B}) = 0$

i) 2 forskjellige reelle egenverdier (**vektlagt)**

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2 \quad \text{der } \left(A - \lambda_1 I\right)\vec{V}_1 = 0 \text{ og } \left(A - \lambda_2 I\right)\vec{V}_2 = 0$$

(ii) og (iii) IKKE vektlagt
ii) 2 like reelle egenverdier:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 e^{\lambda t} V_1 + C_2 e^{\lambda t} (V_1 t + V_2) \quad \text{der } \left(A - \lambda_1 I\right)\vec{V}_1 = 0 \text{ og } \left(A - \lambda I\right)\vec{V}_2 = \vec{V}_1$$

iii) 2 komplekse egenverdier: $\lambda = \alpha \pm i\beta$ og $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi + i\theta \end{bmatrix} V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi + i\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \phi \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ \theta \end{bmatrix} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = C_1 e^{\alpha t} (\mathbf{a} \cos \beta t - \mathbf{b} \sin \beta t) + C_2 e^{\alpha t} (\mathbf{a} \cos \beta t + \mathbf{b} \sin \beta t)$$

eller:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = e^{\alpha t} (C_1 \cos \beta t + C_2 \sin \beta t)\mathbf{a} + e^{\alpha t} (C_2 \cos \beta t - C_1 \sin \beta t)\mathbf{b}$$

Stabilitet for lineære og nesten-lineære systemer

La λ_1 og λ_2 være egenverdiene for koeffisientmatrisen **A** for det todimensjonale lineære systemet som er omtalt, og la $ad - bc \neq 0$. Da er det kritiske punktet (0, 0)

1. Asymptotisk stabilt hvis begge realverdiene av λ_1 og λ_2 er negative (Eksempel 11.2)
2. Stabilt, men ikke asymptotisk hvis begge er 0,
3. Ustabilt hvis λ_1 eller λ_2 har en positiv reell verdi. (Eksempel 11.1, 3.3 og 3.4)

Hvis man ser på *det nesten-lineære systemet* : $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by + r(x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy + s(x, y) \end{cases}$

som har (0, 0) som et isolert kritisk punkt, vil det ha andre stabilitetsegenskaper enn lineære systemer. Det er fordi man får små forandringer fra leddene med høyere orden (*r* og *s*). I kapittel 3.7kommer vi til å studere ikke-lineære systemer. Hvis $r(x, y)$ og $s(x, y)$ består av ledd som har potenssum høyere enn 1 (for eksempel x^2, y^2, $x \cdot y$, $x \cdot y^2$, osv.) , vil disse leddene bli forsvinnende små i nærheten av 0. Derfor kan disse neglisjeres, og man står igjen med det *lineariserte* systemet: $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$. (Se Eksempel 11.11 b))

Karakterisering av likevektspunktet

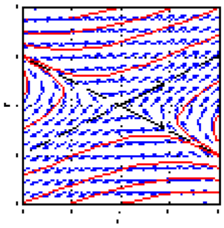
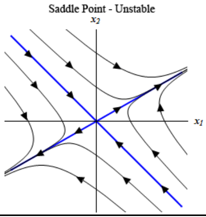
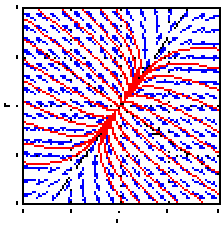
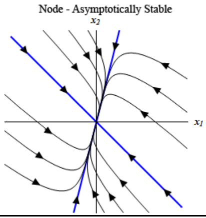
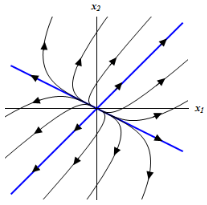
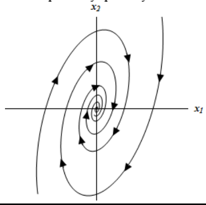
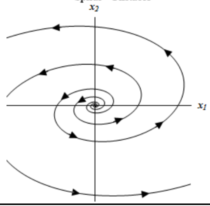
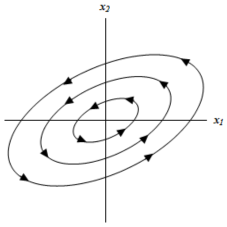
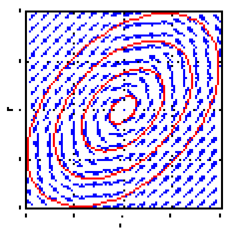
Egenverdier	**likevektspunktet**	**Stabilitet**
Reelle og begge negative $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Knutepunkt (inn)	Asymptotisk stabilt
Reelle og ulike fortegn $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Sadelpunkt	Ustabilt
Reelle og begge positive $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Knutepunkt(ut)	Ustabilt
Kompleksetall, $\alpha \pm i\beta$, $\alpha > 0$	Spiral (ut) – Kilde	Ustabilt
Kompleksetall, $\alpha \pm i\beta$, $\alpha < 0$	Spiral (inn) – Sluk	Asymptotisk stabilt
Kompleksetall, $\pm i\beta$, $\alpha = 0$	Senter	Omløpsstabilt

11.3 Eksempler

Oppsummering –Faseplan og karakterisering av likevektspunkt

Karakterisering av likevektspunkt og faseplan til $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases}$ eller $\dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

der **x** = 0 er et kritisk punkt: $(x, y) = (0, 0)$

 	$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ (motsatt fortegn): Ustabilt **Sadelpunkt**
 	$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ (begge negative) Asymptotisk stabil Knutepunkt (inn) **Sluk**
	$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ (begge positive) Ustabilt Knutepunkt(ut) **Kilde**
 	**Spiral**, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ Sluk (asymptotisk stabil), $\alpha < 0$ Kilde (ustabilt), $\alpha > 0$.
 	**Senter** (stabil), $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, $\alpha = 0$