

Tillegg til eksamen i MAT103 (bokmål)

1. REKKER

Taylorrekker/maclaurinrekker. La f være en funksjon i en variabel som kan deriveres n ganger i punktet $x = a$. Da er *taylorrekken* P om $x = a$ for f gitt ved

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \text{ I tilfellet } a = 0 \text{ kalles dette ofte en } \textit{maclaurinrekke}.$$

Kjente maclaurinrekker.

$$\text{i) } e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ for alle } x.$$

$$\text{ii) } \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \text{ for alle } x.$$

$$\text{iii) } \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ for alle } x.$$

$$\text{iv) } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \text{ for } -1 < x \leq 1.$$

2. FOURIERREKKER

La f være en periodisk funksjon med periode T , og la $L = \frac{T}{2}$. Da er fourierrekken til f

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Her er

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

3. KJENTE INTEGRALER

$$\text{i)} \int x \cos(ax) dx = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x \sin(ax)}{a} + C.$$

$$\text{ii)} \int x^2 \cos(ax) dx = -2 \frac{\sin(ax)}{a^3} + 2 \frac{x \cos(ax)}{a^2} + \frac{x^2 \sin(ax)}{a} + C.$$

$$\text{iii)} \int x \sin(ax) dx = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x \cos(ax)}{a} + C.$$

$$\text{iv)} \int x^2 \sin(ax) dx = 2 \frac{\cos(ax)}{a^3} + 2 \frac{x \sin(ax)}{a^2} - \frac{x^2 \cos(ax)}{a} + C.$$

4. DIFFERENSIALLIGNINGER

En homogen 2. ordens differensialligning $a_n y'' + a_{n-1} y' + a_{n-2} y = 0$ har generell løsning som avhenger av røttene til den karakteristiske ligningen. Dersom vi har

- i) to forskjellige reelle røtter λ_1, λ_2 er den generelle løsningen $y = Ae^{\lambda_1 x} + Be^{\lambda_2 x}$,
- ii) to like røtter λ_1 er den generelle løsningen $y = (Ax + B)e^{\lambda_1 x}$,
- iii) to komplekskonjugerte røtter $\lambda = a \pm bi$ er den generelle løsningen $y = e^{ax}(A \cos(bx) + B \sin(bx))$.

5. FUNKSJONER AV FLERE VARIABLE

- i) f er en funksjon definert på $\mathbb{R}^2$. Dersom f er deriverbar i (a, b) , så har grafen til f et tangentplan i (a, b, c) med $c = f(a, b)$. Ligningen for tangentplanet kan skrives slik:

$$z = c + L(x - a) + M(y - b),$$

der $L = f_x(a, b)$ og $M = f_y(a, b)$.

- ii) Hessematrisen til f i et punkt (a, b) er gitt ved

$$H(a, b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{yx}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$$

Dersom $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ og

$\det H(a, b) < 0$ så er (a, b) et sadelpunkt.

$\det H(a, b) > 0$ og $f_{xx}(a, b) > 0$ så er (a, b) et lokalt minimum.

$\det H(a, b) > 0$ og $f_{xx}(a, b) < 0$ så er (a, b) et lokalt maksimum.

$\det H(a, b) = 0$ så har vi ingen informasjon.

6. KJENTE RESULTATER OM LAPLACETRANSFORMER

$$\text{i)} \quad \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}, \quad s > 0.$$

$$\text{ii)} \quad \mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

$$\text{iii)} \quad \mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a.$$

$$\text{iv)} \quad \mathcal{L}(t^n e^{at}) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a.$$

$$\text{v)} \quad \mathcal{L}(\sin(\alpha t)) = \frac{\alpha}{s^2 + \alpha^2}, \quad s > 0.$$

$$\text{vi)} \quad \mathcal{L}(\cos(\alpha t)) = \frac{s}{s^2 + \alpha^2}, \quad s > 0.$$

$$\text{vii)} \quad \mathcal{L}(e^{\beta t} \sin(\alpha t)) = \frac{\alpha}{(s-\beta)^2 + \alpha^2}, \quad s > \beta.$$

$$\text{viii)} \quad \mathcal{L}(e^{\beta t} \cos(\alpha t)) = \frac{s-\beta}{(s-\beta)^2 + \alpha^2}, \quad s > \beta.$$

$$\text{ix)} \quad \mathcal{L}(u(t-a)) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

$$\text{ix)} \quad \mathcal{L}(\delta(t)) = 1, \quad \mathcal{L}(\delta(t-c)) = e^{-cs}.$$

$$\text{x)} \quad \mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0).$$

$$\text{xi)} \quad \mathcal{L}(f'') = s^2\mathcal{L}(f) - sf(0) - f'(0).$$

$$\text{xii)} \quad \mathcal{L}(f(t-a)u(t-a)) = e^{-as}F(s) = e^{-as}\mathcal{L}(f(t)), \text{ der } u(t-a) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases} \text{ er Heaviside-funksjonen.}$$

$$\text{xiii)} \quad \mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a)$$

$$\text{xiv)} \quad \mathcal{L}(af + bg) = a\mathcal{L}(f) + b\mathcal{L}(g).$$