Tillegg til eksamen i MAT107 (bokmål)

1. Rekker

Taylorrekker/maclaurinrekker. La f være en funksjon i en variabel som kan deriveres n ganger i punktet $x = a$. Da er *taylorrekken* P om $x = a$ for f gitt ved $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$. I tilfellet $a = 0$ kalles dette ofte en *maclaurinrekke*.

Kjente maclaurinrekker.

i) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ for alle x.

ii) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ for alle x.

iii) $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ for alle x.

iv) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ for $-1 < x \leq 1$.

2. Fourierrekker

La f være en periodisk funksjon med periode T, og la $L = \frac{T}{2}$. Da er fourierrekken til f

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right).$$

Her er

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx,$$
$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos(\frac{n\pi x}{L})\, dx,$$
$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin(\frac{n\pi x}{L})\, dx.$$

3. Kjente integraler

i) $\int x\cos(ax)\,dx = \dfrac{\cos(ax)}{a^2} + \dfrac{x\sin(ax)}{a} + C.$

ii) $\int x^2\cos(ax)\,dx = -2\dfrac{\sin(ax)}{a^3} + 2\dfrac{x\cos(ax)}{a^2} + \dfrac{x^2\sin(ax)}{a} + C.$

iii) $\int x\sin(ax)\,dx = \dfrac{\sin(ax)}{a^2} - \dfrac{x\cos(ax)}{a} + C.$

iv) $\int x^2\sin(ax)\,dx = 2\dfrac{\cos(ax)}{a^3} + 2\dfrac{x\sin(ax)}{a^2} - \dfrac{x^2\cos(ax)}{a} + C.$

4. Differensialligninger

En homogen 2. ordens differensialligning $ay'' + by' + cy = 0$ har generell løsning som er avhengig av røttene til den karakteristiske ligningen. Dersom vi har

i) to forskjellige reelle røtter λ_1, λ_2 er den generelle løsningen:
$y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$,

ii) to like røtter λ_1 er den generelle løsningen:
$y = (C_1x + C_2)e^{\lambda_1 x}$,

iii) to komplekskonjugerte røtter $\lambda = \alpha \pm \beta i$ er den generelle løsningen:
$y = e^{\alpha x}\big(C_1\cos(\beta x) + C_2\sin(\beta x)\big)$.

5. Systemer av differensialligninger

i) For et homogent lineært differensialligningssystem, $\vec{y}\,' = A\vec{y}$, med diagonaliserbar konstant koeffisientmatrise A, er den generelle løsningen:

$$\vec{y}(t) = C_1e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1 + \cdots + C_ne^{\lambda_n t}\vec{v}_n,$$

der $\vec{v}_i$ er egenvektor med egenverdi λ_i.

ii) Dersom koeffisientmatrisen har et par komplekskonjugerte egenverdier $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ med tilhørende komplekskonjugerte egenvektorer $\vec{v_1}$ og $\vec{v_2}$, er generell løsning

$$\vec{y}(t) = C_1\mathrm{Re}\left(e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1\right) + C_2\mathrm{Im}\left(e^{\lambda_1 t}\vec{v}_1\right)$$

6. Funksjoner av flere variable

i) f er en funksjon definert på $\mathbb{R}^2$. Dersom f er deriverbar i (a, b), så har grafen til f et tangentplan i (a, b, c) med $c = f(a, b)$. Ligningen for tangentplanet kan skrives slik:

$$z = c + L(x - a) + M(y - b) \ ,$$

der $L = f_x(a, b)$ og $M = f_y(a, b)$.

ii) Hessematrisen til f i et punkt (a, b) er gitt ved

$$H(a, b) = \begin{pmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{yx}(a, b) \\ f_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$$

Dersom $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ og

det$H(a, b) < 0$ så er (a, b) et sadelpunkt.

det$H(a, b) > 0$ og $f_{xx}(a, b) > 0$ så er (a, b) et lokalt minimum.

det$H(a, b) > 0$ og $f_{xx}(a, b) < 0$ så er (a, b) et lokalt maksimum.

det$H(a, b) = 0$ så har vi ingen informasjon.